ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

№ 1

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
Москва ★ 1939

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga, Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue
New York 3, New York

Johnson Reprint Company Limited
Berkeley Square House
London, W. 1

First reprinting, 1963, Johnson Reprint Corporation

XVIII СЪЕЗД ВСЕСОЮЗНОЙ КОММУНИСТИЧЕСКОЙ ПАРТИИ (БОЛЬШЕВИКОВ)

XVIII съезд ВКП(б)—крупнейшее событие в жизни нашей страны. Этот съезд подвел итоги замечательным достижениям нашей родины за годы второй сталинской пятилетки и наметил величественный путь дальнейшего строительства народного хозяйства и культуры в годы третьей сталинской пятилетки.

В своем историческом докладе на XVIII съезде нашей партии товарищ Сталин дал глубочайший анализ международного положения, хозяйственного и политического развития СССР и изложил программу нашего дальнейшего роста, завершения в нашей стране строительства социализма и постепенного перехода от социализма к коммунизму. Доклад товарища Сталина является ценнейшим вкладом в марксистско-ленинскую науку, так как в нем дано решение ряда важнейших теоретических проблем. Товарищ Сталин внес полную ясность в такие серьезные вопросы, как вопрос о социалистическом государстве и вопрос о советской интеллигенции.

Итоги второй сталинской пятилетки имеют всемирно-историческое значение. В нашей стране окончательно ликвидированы все эксплуататорские классы, полностью уничтожены причины, порождающие эксплуатацию человека человеком и разделение общества на эксплуататоров и эксплуатируемых. Таким образом у нас воплощены в жизнь идеи лучших мыслителей человечества. Победа социализма в СССР является реальным фактом, законодательно закрепленным в Сталинской Конституции.

За годы второй пятилетки в основном завершена техническая реконструкция народного хозяйства СССР. Наша страна из отсталой превратилась в передовую, экономически независимую, индустриальную, технически оснащенную, мощную державу. Мы имеем уже многочисленные кадры, овладевшие техникой. Одним из наиболее ярких выражений наших достижений в области освоения новой техники является стахановское движение.

В то время как в странах капитализма за последнее десятилетие один кризис сменяется другим, растет армия безработных и вместо роста промышленности происходит даже заметное уменьшение производства, у нас в СССР мы имели высокий рост промышленного производства из года в год. В 1938 г. продукция промышленности у нас достигла 477 процентов по сравнению с уровнем 1929 г., между тем

в капиталистических странах промышленная продукция 1938 г. составляла лишь 90 процентов по сравнению с уровнем 1929 г.

В связи с успешным и досрочным выполнением второго пятилетнего плана мы можем также отметить подъем материально-культурного уровня трудящихся. Проведена настоящая культурная революция. Если раньше задача ликвидации у нас неграмотности и введения всеобщего начального обучения представлялась весьма трудной, то теперь мы уже можем считать реальной задачу введения всеобщего среднего образования.

«Мы имеем теперь многочисленную, новую, народную, социалистическую интеллигенцию, в корне отличающуюся от старой, буржуазной интеллигенции как по своему составу, так и по своему социально-политическому облику» (Сталин).

В результате решения важнейших задач второй пятилетки у нас полностью победила социалистическая система хозяйства. Теперь «мы идем дальше, вперед, к коммунизму» (Сталин).

Программа третьей пятилетки, утвержденная на съезде по докладу товарища Молотова, устанавливает очередные конкретные задачи, связанные со строительством коммунизма в нашей стране.

В третьем пятилетии мы вступили «в полосу *завершения строительства бесклассового социалистического общества* и *постепенного перехода от социализма к коммунизму*, когда решающее значение приобретает дело коммунистического воспитания трудящихся, преодоление пережитков капитализма в сознании людей—строителей коммунизма» (из резолюции XVIII съезда ВКП(б) по докладу товарища В. М. Молотова). Эта задача, которая конкретно стоит перед нами на ближайший период времени, по своей грандиозности не имеет прецедентов во всей истории человечества. Мы не сомневаемся в том, что трудящиеся нашей страны решат ее успешно. Подтверждением этого является успешное выполнение первых двух пятилеток, преданность рабочих, крестьян и советской интеллигенции делу строительства коммунизма, гениальное руководство великого Сталина всей нашей работой.

Не следует при этом преуменьшать трудностей, которые нам придется преодолеть при решении этой задачи. Мы еще отстаем по размерам производства на душу населения от наиболее развитых в технико-экономическом отношении капиталистических стран. Поэтому необходимо в течение ближайшего периода времени полностью ликвидировать эту отсталость, догнать и перегнать также в экономическом отношении наиболее развитые капиталистические страны Европы и Соединенные Штаты Америки. Учитывая, что мы живем в капиталистическом окружении, необходимо еще выше поднять большевистскую бдительность, нужно полностью ликвидировать последствия контрреволюционного вредительства и остатки шпионо-троцкистско-бухаринских агентов фашизма и иностранного капитала. Мы должны принять все меры к дальнейшему укреплению оборонной мощи нашей родины.

Намеченный рост производства и нового строительства поистине грандиозен. Объем промышленной продукции на 1942 г., последний год

третьей пятилетки, установлен в размере 184 миллиардов рублей (в ценах 1926—1927 гг.). Таким образом мы будем иметь рост продукции нашей промышленности за годы третьей пятилетки на 92 процента. Восхищение и чувство законной гордости вызывает у всех трудящихся СССР запроектированное по третьему пятилетнему плану новое строительство. Достаточно отметить, например, создание в районе между Волгой и Уралом новой нефтяной базы —«Второе Баку», создание на Дальнем Востоке новой металлургической базы, создание новой крупной производственной базы текстильной промышленности на востоке СССР с переработкой среднеазиатского хлопка, строительство величайшего в мире сооружения — двух Куйбышевских гидростанций общей мощностью в 3,4 миллиона киловатт, превращение Северного Морского Пути в нормально действующую водную магистраль, строительство новых железных дорог протяжением в 11 тысяч километров, окончание строительства третьей очереди метро и основных строительных работ по сооружению Дворца Советов в Москве.

Для осуществления намеченного роста производства и нового строительства требуется значительное повышение уровня нашей техники и нашей науки.

В связи с этим и советская математика должна построить свою работу так, чтобы в максимальной степени содействовать великому делу строительства коммунизма. Среди математических исследований в нашей стране необходимо поднять удельный вес тех проблем, которые связаны с приложениями математики к технике и естествознанию. Советские математики должны установить тесный контакт с представителями технических наук для совместной постановки и решения научных проблем, важных для практики нашего строительства.

Перед советской математикой встают большие задачи в связи с проблемой поднятия культурно-технического уровня рабочего класса СССР до уровня работников инженерно-технического труда и в связи с необходимостью повышения качества высшего образования. Здесь нельзя ограничиваться простым улучшением или расширением курсов математики, преподаваемых в наших высших учебных заведениях. Советские математики должны принять все меры для улучшения преподавания математических дисциплин и полностью обеспечить нашу высшую школу соответствующими высококачественными учебниками. Но наряду с этим необходимо добиться такого положения, чтобы знания по математике, получаемые студентами, были в полной мере использованы при прохождении ими общетехнических и специальных дисциплин. Только при этом условии студенты будут подготовлены для плодотворного применения математических методов к решению практических задач. В связи с этим советские математики должны содействовать поднятию математической культуры профессорско-преподавательского состава по общетехническим и специальным дисциплинам, обеспечить подготовку высококвалифицированных инженерно-технических работников с широким физико-математическим образованием и принимать участие в составлении учебных

руководств по общетехническим и специальным дисциплинам (теория упругости, техническая механика, сопротивление материалов, электротехника и др.).

В тесной связи с повышением качества высшего образования стоит вопрос о постановке на должную высоту обучения в начальной и средней школе. По третьему пятилетнему плану предполагается довести количество учащихся в начальной и средней школе до сорока миллионов человек. Таким образом, в нашей стране вопрос о правильной организации школьного дела приобретает исключительно важное значение. Нечего и говорить, что каждое, хотя и небольшое, улучшение в этом деле, будучи распространено на всю многомиллионную армию наших школьников, должно дать большой эффект.

Математика в общей системе школьного обучения занимает почетное место. Поэтому математическая научная общественность должна уделять исключительно серьезное внимание вопросам преподавания математики в начальной и средней школе. Составление программ, учебников и задачников, издание литературы для учителей и для кружков учащихся, повышение квалификации учителей—всем этим должны заниматься советские математики.

Во время XVIII съезда ВКП(б) весь советский народ демонстрировал свою сплоченность вокруг партии Ленина-Сталина, свою преданность и любовь великому Сталину. Изменения в уставе ВКП(б), внесенные съездом по докладу товарища Жданова, обеспечивают еще более тесную связь партии большевиков со всеми трудящимися.

В связи с XVIII съездом ВКП(б) широкой волной развернулось социалистическое соревнование по всей нашей стране. Трудящиеся СССР отмечают это крупнейшее историческое событие подъемом трудового энтузиазма, производственной инициативы и активности на заводах, фабриках, в совхозах и колхозах, в научных и учебных учреждениях. Нет никакого сомнения в том, что советские математики вместе со всем великим советским народом приложат все усилия к тому, чтобы обеспечить успешное выполнение задач третьего пятилетнего плана и построение коммунистического общества.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

И. И. ПРИВАЛОВ

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К ТЕОРИИ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе дается необходимое и достаточное условие для того, чтобы отрицательная субгармоническая функция была потенциалом Грина-Стильтьеса. Кроме того, выводится необходимый признак существования гармонической мажоранты у субгармонической функции.

Пусть $u(P) = u(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})$ есть субгармоническая функция в области шара $\overline{OP} = r < 1$ пространства $p \geqslant 2$ измерений. Как известно, для того чтобы субгармоническая функция $u(P)$ в шаре $\overline{OP} < 1$ имела гармоническую мажоранту, необходимо и достаточно, чтобы ее среднее значение на сфере $\overline{OP} = r < 1$

$$I(r, u) = \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} u(P)\, d\sigma$$

стремилось к конечному пределу при $r \to 1$ (1).

Заметив, с другой стороны, что

$$I(r, u) = I(r, h_r) = h_r(O),$$

где $h_r(P)$ — наилучшая гармоническая мажоранта функции u в шаре $\overline{OP} \leqslant r$, мы убеждаемся в справедливости соотношения

$$\lim_{r \to 1} I(r, u) = h(O), \tag{1}$$

где $h(P)$ — наилучшая гармоническая мажоранта функции $u(P)$ во всем шаре $\overline{OP} < 1$.

Пусть теперь $u(P)$ произвольная отрицательная субгармоническая функция в шаре $\overline{OP} < 1$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{r \to 1} I(r, u) = 0. \tag{2}$$

Ее наилучшая гармоническая мажоранта $h(P)$ неположительная, и так как, в силу соотношений (1) и (2), $h(O) = 0$, то $h(P) \equiv 0$.

Итак, отрицательная субгармоническая функция, удовлетворяющая условию (2), имеет своей наилучшей гармонической мажорантой тождественный нуль. Обратно, если отрицательная субгармоническая функция имеет нуль в качестве своей наилучшей гармонической мажоранты, то она удовлетворяет соотношению (2), как это видно из равенства (1).

Заметив, что класс субгармонических функций с нулевой наилучшей мажорантой характеризуется аналитическим представлением в виде потенциала Грина-Стильтьеса ([2]), т. е.

$$u(P) = -\int G(P; Q)\, d\mu(Q), \tag{3}$$

мы заключаем:

ТЕОРЕМА 1. *Среди отрицательных субгармонических функций $u(P)$, определенных в области шара $\overline{OP} = r < 1$, пространства $p \geqslant 2$ измерений, потенциал Грина-Стильтьеса (3) характеризуется условием*

$$I(r, u) = \frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} u(P)\, d\sigma \longrightarrow 0 \quad \textit{при } r \longrightarrow 1 \; *.$$

Из соотношения (1) также может быть выведен интересный необходимый признак для существования гармонической мажоранты субгармонической функции $u(P)$ в шаре $\overline{OP} < 1$.

Действительно, обозначая через $h(P)$ наилучшую гармоническую мажоранту субгармонической функции $u(P)$ в шаре $\overline{OP} < 1$, воспользуемся формулой Рисса ([2]

$$u(P) = -\int G(P; Q)\, d\mu(Q) + h(P),$$

откуда, в силу соотношения (1), получим

$$A_r = \frac{1}{\sigma}\int d\sigma \int G(P; Q)\, d\mu(Q) \longrightarrow 0 \quad \text{при } r \longrightarrow 1. \tag{4}$$

Остается лишь представить в развернутом виде выражение, стоящее в левой части соотношения (4). Для этого отдельно рассмотрим два случая: $p = 2$ и $p > 2$. В первом случае

$$\int G(P; Q)\, d\mu(Q) = \int\int_{|\zeta|<1} \ln\left|\frac{1 - z\bar{\zeta}}{z - \zeta}\right| d\mu(\zeta) = f(z),$$

откуда

$$A_r = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\int_{|\zeta|<1} d\mu(\zeta)\int_0^{2\pi} \ln\left|\frac{1 - z\bar{\zeta}}{z - \zeta}\right| d\theta,$$

или

$$A_r = \frac{1}{2\pi}\int\int_{|\zeta|<r} d\mu(\zeta)\int_0^{2\pi} \ln\left|\frac{1 - z\bar{\zeta}}{z - \zeta}\right| d\theta + \frac{1}{2\pi}\int\int_{|\zeta|\geqslant r}. \tag{5}$$

---

* Это предложение есть также немедленное следствие развитой мною теории субгармонических функций класса C ([3]). В случае $u(P) = u(z) = \ln|\varphi(z)|$, где $\varphi(z)$ — аналитическая функция в круге $|z| < 1$, $|\varphi(z)| < 1$, предложение установлено в диссертации Frostmann'a.

В первом интеграле правой части формулы (5) $|\zeta| < r = |z|$; следовательно,

$$\left|\frac{z-\zeta}{z-\frac{r^2}{\bar{\zeta}}}\right| = \frac{|\zeta|}{r}$$

или

$$|z-\zeta| = \frac{1}{r}|r^2 - z\bar{\zeta}|;$$

заметив это, имеем

$$\left|\frac{1-z\bar{\zeta}}{z-\zeta}\right| = r\left|\frac{1-z\bar{\zeta}}{r^2-z\bar{\zeta}}\right|$$

Таким образом получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\frac{1-z\bar{\zeta}}{z-\zeta}\right| d\theta = \ln r + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\frac{1-z\bar{\zeta}}{r^2-z\bar{\zeta}}\right| d\theta = \ln\frac{1}{r} \tag{6}$$

в силу формулы Гаусса.

Во втором интеграле правой части формулы (5) $|\zeta| \geqslant r = |z|$; следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\frac{1-z\bar{\zeta}}{z-\zeta}\right| d\theta = \ln\frac{1}{|\zeta|} \tag{7}$$

в силу формулы Гаусса.

Пользуясь формулами (6) и (7), перепишем соотношение (5) в виде

$$A_r = \ln\frac{1}{r}\, n(r) + \iint\limits_{|\zeta| \geqslant r} \ln\frac{1}{|\zeta|}\, d\mu(\zeta), \tag{8}$$

где $n(r) = \iint\limits_{|\zeta| < r} d\mu(\zeta)$ обозначает массу нашей субгармонической функции, заключенную в круге $|\zeta| < r$.

Переходя к пределу при $r \to 1$, из соотношения (8) вследствие (4) получим

$$\lim_{r\to 1} n(r) \ln\frac{1}{r} = -\alpha, \tag{9}$$

где

$$\alpha = \lim_{r\to 1}\iint\limits_{|\zeta| \geqslant r} \ln\frac{1}{|\zeta|}\, d\mu(\zeta) \geqslant 0.$$

Очевидно, $\alpha = 0$, так как $n(r)\ln\frac{1}{r}$ не принимает отрицательных значений.

Итак, из формулы (9) находим

$$\lim_{r\to 1} n(r)\ln\frac{1}{r} = 0.$$

Заметив, наконец, что $\ln \frac{1}{r}$ и $1-r$ суть эквивалентные бесконечно малые величины при $r \to 1$, перепишем последнее соотношение в виде

$$\lim_{r \to 1} n(r)(1-r) = 0. \tag{10}$$

Обратимся теперь к рассмотрению второго случая: $p > 2$. В этом случае

$$G(P;\, Q) = \frac{1}{\overline{PQ}^{p-2}} - \left(\frac{\overline{OQ^*}}{\overline{Q^*P}}\right)^{p-2}$$

и

$$f(P) = \int G(P;\, Q)\, d\mu(Q),$$

где Q^* — точка, симметричная с точкой Q относительно единичной сферы. Следовательно,

$$A_r = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{\overline{OP}=r} f(P)\, d\sigma = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{\overline{OQ}<r} d\mu(Q) \int G(P;\, Q)\, d\sigma + \frac{1}{\sigma} \int\limits_{\overline{OQ} \geqslant r} . \tag{5'}$$

В первом интеграле правой части последней формулы $\overline{OQ} < r = \overline{OP}$ следовательно,

$$\overline{PQ} = \frac{1}{r} \overline{OQ} \cdot \overline{PQ'},$$

где Q' — точка, симметричная с точкой Q относительно сферы $\overline{OP} = r$ заметив это, найдем

$$G(P;\, Q) = \left(\frac{r}{\overline{OQ} \cdot \overline{PQ'}}\right)^{p-2} - \left(\frac{\overline{OQ^*}}{\overline{Q^*P}}\right)^{p-2}.$$

Таким образом получаем

$$\frac{1}{\sigma} \int G(P;\, Q)\, d\sigma = \left(\frac{r}{\overline{OQ} \cdot \overline{OQ'}}\right)^{p-2} - 1 = \frac{1}{r^{p-2}} - 1 \tag{6'}$$

в силу формулы Гаусса.

Во втором интеграле правой части формулы (5') $\overline{OQ} \geqslant r$ и

$$\frac{1}{\sigma} \int G(P;\, Q)\, d\sigma = \frac{1}{\sigma} \int \left[\frac{1}{\overline{PQ}^{p-2}} - \left(\frac{\overline{OQ^*}}{\overline{Q^*P}}\right)^{p-2}\right] d\sigma = \frac{1}{\overline{OQ}^{p-2}} - 1 \tag{7'}$$

в силу формулы Гаусса.

Пользуясь формулами (6') и (7'), перепишем соотношение (5') в виде

$$A_r = \left(\frac{1}{r^{p-2}} - 1\right) n(r) + \int\limits_{\overline{OQ} \geqslant r} \left[\frac{1}{\overline{OQ}^{p-2}} - 1\right] d\mu(Q), \tag{8'}$$

где $n(r) = \int\limits_{\overline{OQ}<r} d\mu(Q)$ обозначает массу нашей субгармонической функции, заключенную в шаре $\overline{OQ} < r$.

Переходя к пределу при $r \to 1$, из соотношения (8′) вследствие (4) получим

$$\lim_{r \to 1} n(r)\left(\frac{1}{r^{p-2}} - 1\right) = -\alpha, \qquad (9')$$

где

$$\alpha = \lim_{r \to 1} \int_{\overline{OQ} \geqslant r} \left[\frac{1}{\overline{OQ}^{p-2}} - 1\right] d\mu(Q) \geqslant 0.$$

Очевидно, $\alpha = 0$, так как $n(r)\left(\frac{1}{r^{p-2}} - 1\right)$ не принимает отрицательных значений.

Итак, из формулы (9′) находим

$$\lim_{r \to 1} n(r)\left(\frac{1}{r^{p-2}} - 1\right) = 0$$

или

$$\lim_{r \to 1} n(r)(1 - r) = 0. \qquad (10')$$

Равенства (10) и (10′) приводят нас к теореме:

ТЕОРЕМА 2. *Необходимым условием существования гармонической мажоранты субгармонической функции во всем единичном шаре является выполнение равенства*

$$\lim_{r \to 1} n(r)(1 - r) = 0,$$

где $n(r)$ обозначает величину массы, заключенной в шаре $\overline{OP} < r$.

Примечание. Установленный признак является немедленным следствием данного мною ранее ([4]) необходимого и достаточного критерия существования гармонической мажоранты субгармонической функции. Однако последний критерий применяется к субгармонической функции, имеющей в точке O конечное значение, либо, если $u(O) = -\infty$, с гармоническим поведением в окрестности точки O. Предлагаемый же здесь вывод необходимого признака свободен от каких-либо ограничений относительно субгармонической функции.

Математический институт
при Московском гос. университете.

Поступило
1. XI. 1938.

ЛИТЕРАТУРА

1 Riesz F., Acta Math., 1926; Привалов И. И., Субгармонические функции, 1937, стр. 45.

2 Riesz F., Acta Math., 1930; Привалов И. И., Субгармонические функции, 1937, стр. 163.

3 Привалов И. И., Различные классы субгармонических функций в связи с их аналитическими представлениями, Изв. АН СССР, Серия матем., 1938, № 2.

4 Привалов И. И., Субгармонические функции, 1937, стр. 175.

I. PRIVALOFF. QUELQUES REMARQUES DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS SUBHARMONIQUES

RÉSUMÉ

Je démontre dans le présent article deux propositions:

1. Parmi les fonctions subharmoniques négatives $u(P)$ définies dans la sphère $\overline{OP} = r < 1$ d'un espace à $p \geqslant 2$ dimensions le potentiel de Green-Stieltjes est caractérisé par la condition

$$I(r, u) = \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} u(P)\, d\sigma \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad r \longrightarrow 1.$$

2. Pour qu'il existe une fonction harmonique majorante pour une fonction subharmonique dans toute la sphère $r < 1$, il est nécessaire que l'on ait l'égalité

$$\lim_{r \to 1} n(r)(1 - r) = 0,$$

où $n(r)$ désigne la valeur de la masse contenue dans la sphère $\overline{OP} < r$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

И. И. ПРИВАЛОВ

К ПРОБЛЕМЕ ВАТСОНА

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

Задача настоящей статьи—распространить известную теорему Ватсона для аналитических функций на случай субгармонических функций любого числа независимых переменных.

ЗАДАЧА I. *Пусть K есть круг $|z-1|<1$. Какие условия нужно наложить на последовательности положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$, чтобы гармонические функции*

$$a_n \ln|z| + \ln m_n \quad (n=1, 2, \ldots)$$

были мажорантами в круге K субгармонической функции?

Всякое условие, наложенное на последовательности $\{a_n\}$ и $\{m_n\}$ будет необходимым, если оно выполняется всякий раз, как субгармоническая функция $u(z)$ удовлетворяет неравенствам

$$u(z) \leqslant a_n \ln|z| + \ln m_n \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Условие достаточно, если при его выполнении существует хоть одна субгармоническая функция $u(z)$, подчиненная неравенствам (1).

Введем, следуя Островскому [1], следующую функцию $T(r)$, определенную для $r>0$:

$$T(r) = \sup_{n \geqslant 1} \frac{r^{a_n}}{m_n} \quad (\text{возможно, что } T(r)=\infty).$$

Очевидно, что $T(r)$ неубывающая функция и стремится к бесконечности вместе с r. С помощью этой функции поставленная проблема решается следующим образом.

Необходимое и достаточное условие задачи I заключается в сходимости интеграла

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr. \tag{2}$$

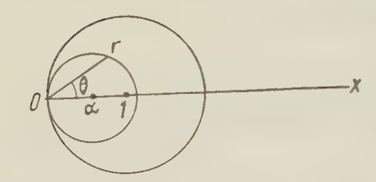
Необходимость условия (2). Допустим, что существует субгармоническая функция $u(z)$ в круге K, удовлетворяющая неравенствам (1). Мы покажем, что тогда интеграл (2) сходится. Так как $u(z)$ стремится к $-\infty$, когда $z \to 0$, то возможно построить круг $|z-\alpha| \leqslant \alpha$, где $0<\alpha<1$, на котором функция $u(z)$ отрицательна (см. фигуру).

Для точек ζ, лежащих на окружности $|z-\alpha|=\alpha$, неравенства (1) нам дают

$$u(\zeta) \leqslant \ln m_n + a_n \ln(2\alpha\cos\theta),$$

где θ — аргумент точки ζ. Так как в этих неравенствах n — любое целое положительное число, то

$$u(\zeta) \leqslant \ln\left\{\inf_{n\geqslant 1}[m_n(2\alpha\cos\theta)^{a_n}]\right\}.$$



Заметив, что

$$\inf[m_n(2\alpha\cos\theta)^{a_n}] \leqslant \frac{1}{\sup\left[\frac{1}{m_n(2\alpha\cos\theta)^{a_n}}\right]},$$

получим

$$u(\zeta) \leqslant -\ln\left\{\sup_{n\geqslant 1}\left[\frac{1}{m_n(2\alpha\cos\theta)^{a_n}}\right]\right\}$$

или, по определению функции $T(r)$,

$$u(\zeta) \leqslant -\ln T\left(\frac{1}{2\alpha\cos\theta}\right). \tag{3}$$

С другой стороны, выберем внутри круга $|z-\alpha|<\alpha$ точку z_0 так, чтобы $u(z_0)$ имело конечное значение, и воспользуемся свойством субгармоничности функции $u(z)$:

$$u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(\alpha+\alpha Re^{i\varphi})\frac{R^2-\left|1-\frac{z_0}{\alpha}\right|^2}{R^2+\left|1-\frac{z_0}{\alpha}\right|^2-2R\left|1-\frac{z_0}{\alpha}\right|\cos(\varphi-\varphi_0)}\,d\varphi,$$

где $1>R>\left|1-\frac{z_0}{\alpha}\right|$.

Заметив, что $u(\alpha+\alpha Re^{i\varphi})$ — величина отрицательная, мы усилим предыдущее неравенство, если заменим фактор Пуассона его наименьшим значением; таким образом получим:

$$u(z_0) < \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{R-\left|1-\frac{z_0}{\alpha}\right|}{R+\left|1-\frac{z_0}{\alpha}\right|}\int_{-\pi}^{+\pi} u(\alpha+\alpha Re^{i\varphi})\,d\varphi.$$

Мы еще более усилим наше неравенство, если распространим интеграл не на весь промежуток $[-\pi, +\pi]$, а на некоторую его часть. В частности, имеем

$$u(z_0) < \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{R-\left|1-\frac{z_0}{\alpha}\right|}{R+\left|1-\frac{z_0}{\alpha}\right|}\int_{-\pi+\eta_1}^{\pi-\eta_2} u(\alpha+\alpha Re^{i\varphi})\,d\varphi.$$

Но в области, получающейся из круга $|z-\alpha|\leqslant\alpha$ удалением сектора, ограниченного лучами $\varphi=-\pi+\eta_1$ и $\varphi=\pi-\eta_2$, функция $u(z)$ субгармоническая, и, следовательно, есть предел монотонно убывающей после-

довательности непрерывных функций $g_n(z)$. Заметив это, из последнего неравенства получим

$$u(z_0) < \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{R - \left|1 - \frac{z_0}{\alpha}\right|}{R + \left|1 - \frac{z_0}{\alpha}\right|} \int\limits_{-\pi+\eta_1}^{\pi-\eta_2} g_n(\alpha + \alpha \text{[illegible]} \, d\varphi.$$

Считая n неизменным, а R устремляя к 1, найдем

$$u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - \left|1 - \frac{z_0}{\alpha}\right|}{1 + \left|1 - \frac{z_0}{\alpha}\right|} \int\limits_{-\pi+\eta_1}^{\pi-\eta_2} g_n(\alpha + \alpha e^{i\varphi}) \, d\varphi.$$

Заставляя теперь n стремиться к $+\infty$, получим

$$u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - \left|1 - \frac{z_0}{\alpha}\right|}{1 + \left|1 - \frac{z_0}{\alpha}\right|} \int\limits_{-\pi+\eta_1}^{\pi-\eta_2} u(\alpha + \alpha e^{i\varphi}) \, d\varphi.$$

В последнем неравенстве числа η_1 и η_2 можно взять сколь угодно малыми. Так как правая часть этого неравенства убывает вместе с η_1 и η_2, то можно перейти к пределу, устремив эти числа к нулю, и получим сходящийся интеграл:

$$u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - \left|1 - \frac{z_0}{\alpha}\right|}{1 + \left|1 - \frac{z_0}{\alpha}\right|} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} u(\alpha + \alpha e^{i\varphi}) \, d\varphi$$

или, что то же,

$$u(z_0) \leqslant \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1 - \left|1 - \frac{z_0}{\alpha}\right|}{1 + \left|1 - \frac{z_0}{\alpha}\right|} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} u(\zeta) \, d\theta.$$

Воспользовавшись неравенством (3), получим отсюда

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \ln T\left(\frac{1}{2\alpha\cos\theta}\right) \leqslant -\frac{1 + \left|1 - \frac{z_0}{\alpha}\right|}{1 - \left|1 - \frac{z_0}{\alpha}\right|} u(z_0). \qquad (4)$$

Заметив, с другой стороны, что

$$\ln T\left(\frac{1}{2\alpha\cos\theta}\right) \geqslant \ln T\left(\frac{1}{2\alpha}\right),$$

мы из неравенства (4) заключаем о существовании интеграла

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \ln T\left(\frac{1}{2\alpha\cos\theta}\right) d\theta,$$

а с ним и интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln T\left(\frac{1}{2\alpha\cos\theta}\right) d\theta. \tag{5}$$

Но интеграл (2) сходится или расходится одновременно с интегралом (5). В самом деле, если в интеграле (5) положить

$$\frac{1}{2\alpha\cos\theta} = r,$$

то он примет вид

$$\int_{\frac{1}{2\alpha}}^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{4\alpha^2 r^2 - 1}}\, dr.$$

При $r \to \infty$, множитель $\frac{r}{\sqrt{4\alpha^2 r^2 - 1}}$ имеет конечный предел и, следовательно, не влияет на сходимость интеграла. Но, откидывая этот множитель, мы приходим как раз к интегралу (2), при рассмотрении сходимости которого безразлично, каков его нижний предел, лишь бы он был больше нуля.

Таким образом необходимость условия (2) доказана.

Достаточность условия (2). Как мы только что видели, интеграл (2) сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \ln T\left(\frac{1}{2\alpha\cos\theta}\right) d\theta,$$

равным удвоенному значению интеграла (5). При этом величина α безразлична, потому что она влияет лишь на нижний предел интеграла (2); в частности, можно считать $\alpha = 1$. Таким образом, допустив существование интеграла (2), мы можем утверждать, что функция $\ln T\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)$ суммируема в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ или, что то же, на основной окружности $|z-1| = 1$.

Рассмотрим интеграл Пуассона

$$U(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \ln T\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right) \frac{1 - l^2}{1 + l^2 - 2l\cos\gamma}\, d\theta,$$

где l — расстояние от центра $A(1, 0)$ до точки $P(x, y)$, γ — угол между векторами $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AQ}$, Q — точка интегрирования. Покажем, что гармоническая функция $-U(x, y)$ удовлетворяет всем неравенствам (1). Действительно, нам нужно доказать, что

$$-U(x, y) \leqslant \ln m_n + a_n \ln|z| \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Заметив, что

$$1=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{1-l^2}{1+l^2-2l\cos\gamma}d\theta,$$

$$\ln|z|=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\ln(2\cos\theta)\frac{1-l^2}{1+l^2-2l\cos\gamma}d\theta,$$

перепишем доказываемые неравенства в виде

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left\{\ln T\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)+\ln m_n+a_n\ln(2\cos\theta)\right\}\frac{1-l^2}{1+l^2-2l\cos\gamma}d\theta\geqslant 0$$

или

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\ln\left\{T\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)m_n(2\cos\theta)^{a_n}\right\}\frac{1-l^2}{1+l^2-2l\cos\gamma}d\theta\geqslant 0.$$

Последние же неравенства следуют из неравенств

$$T\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)\geqslant\frac{1}{m_n(2\cos\theta)^{a_n}},$$

справедливых при всех n в силу определения функции $T(r)$.

Таким образом достаточность условия (2) доказана.

Замечание 1. Так как при выполнении условия (2) существует гармоническая функция, подчиненная неравенствам (1), то условие (2) не изменится, если вместо субгармонических функций будем рассматривать лишь гармонические функции.

Замечание 2. Принимая в доказанной теореме

$$u(z)=\ln|f(z)|,$$

где $f(z)$ — аналитическая функция внутри круга $|z-1|<1$, не равная тождественно нулю, мы получим: расходимость интеграла $\int\limits_1^\infty\frac{\ln T(r)}{r^2}dr$ есть условие, необходимое и достаточное для того, чтобы всякая функция, аналитическая внутри круга K и подчиненная условиям

$$|f(z)|\leqslant m_n|z|^{a_n}\quad(n=1, 2, \ldots)$$

была тождественно равной нулю.

В частности, когда $a_n=n$, эта задача была поставлена Ватсоном и разрешена Карлеманом * ([2, 3]).

* В изложенном выше доказательстве обобщенной проблемы Ватсона мы следуем изложению Мандельбройта, содержащемуся в его монографии ([3]).

ЗАДАЧА II. *Пусть K есть шар с центром $(1, 0, 0)$ радиуса 1. Какие условия нужно наложить на последовательности положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$, чтобы гармонические функции*

$$-\frac{a_n}{\rho}+\ln m_n \quad (n=1, 2, \ldots), \ \rho=\overline{OP},$$

были мажорантами субгармонической функции?

Введем в рассмотрение следующую функцию $T_3(r)$, определенную для $r>0$:

$$T_3(r)=\sup_{n\geqslant 1}\frac{e^{a_n r}}{m_n}.$$

Очевидно, что $T_3(r)$ — неубывающая функция и стремящаяся к бесконечности вместе с r. С помощью этой функции поставленная проблема решается следующим образом.

Необходимое и достаточное условие задачи II заключается в сходимости интеграла

$$\int_1^\infty \frac{\ln T_3(r)}{r^3}\,dr. \tag{6}$$

Необходимость условия (6). Допустим, что существует субгармоническая функция $u(P)$ в шаре K, удовлетворяющая неравенствам

$$u(P)\leqslant -\frac{a_n}{\rho}+\ln m_n \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Мы покажем, что тогда интеграл (6) сходится.

Так как $u(P)$ стремится к $-\infty$, когда $\overline{OP}=\rho\to 0$, то возможно построить шар C с центром в точке $(\alpha, 0, 0)$, где $0<\alpha<1$, радиуса α, на котором функция $u(P)$ отрицательна.

Для точек Q, лежащих на поверхности этого шара, неравенства (7) нам дают:

$$u(Q)\leqslant -\frac{a_n}{2\alpha\cos\theta}+\ln m_n=\ln\frac{m_n}{e^{\frac{a_n}{2\alpha\cos\theta}}},$$

где θ — угол радиуса-вектора $\overrightarrow{OQ}$ с положительной осью x-ов.

Так как в этих неравенствах n — любое целое положительное число, то

$$u(Q)\leqslant \ln\left\{\inf_{n\geqslant 1}\left[\frac{m_n}{e^{\frac{a_n}{2\alpha\cos\theta}}}\right]\right\}$$

или

$$u(Q)\leqslant -\ln\left\{\sup_{n\geqslant 1}\left[\frac{e^{\frac{a_n}{2\alpha\cos\theta}}}{m_n}\right]\right\}=-\ln T_3\left(\frac{1}{2\alpha\cos\theta}\right). \tag{8}$$

С другой стороны, выберем внутри шара C точку P_0 так, чтобы

$u(P_0)$ имело конечное значение, и воспользуемся свойством субгармоничности функции $u(P)$:

$$u(P_0) \leqslant \frac{1}{\sigma'} \int\int u(Q') \frac{(R^2 - l^2) R \, d\sigma'}{(R^2 + l^2 - 2Rl \cos\gamma)^{3/2}},$$

где интегрирование распространено по сфере σ' радиуса $R > \overline{A}P_0 = l$, $R < \alpha$, с центром в точке $A(\alpha, 0, 0)$, γ — угол между векторами $\overrightarrow{AP_0}$ и $\overrightarrow{AQ'}$. Заметив, что $u(Q')$ — величина отрицательная, мы усилим предыдущее неравенство, если заменим фактор Пуассона его наименьшим значением; таким образом получим:

$$u(P_0) < \frac{1}{\sigma'} \cdot \frac{(R - l) R}{(R + l)^2} \int\int u(Q') \, d\sigma'.$$

Мы еще более усилим наше неравенство, если распространим интеграл не на всю сферу σ', а на некоторую ее часть. Примем за область интегрирования σ'' ту часть сферы σ', которая останется после выкидывания из нее сегмента, получающегося в пересечении этой сферы с конусом с вершиной в точке $A(\alpha, 0, 0)$ и образующие которого составляют произвольно малые углы с отрицательным направлением оси x-ов.

Но в области, получающейся из шара $\overline{C}$ удалением сектора, ограниченного этим конусом, функция $u(P)$ субгармоническая и, следовательно, есть предел монотонно убывающей последовательности непрерывных функций $g_n(P)$. Заметив это, из последнего неравенства получим

$$u(P_0) < \frac{1}{\sigma'} \cdot \frac{(R - l) R}{(R + l)^2} \int\int g_n(Q') \, d\sigma',$$

где интегрирование распространено на область σ''. Считая n неизменным, а R устремляя к α, найдем:

$$u(P_0) \leqslant \frac{1}{4\pi\alpha} \cdot \frac{\alpha - l}{(\alpha + l)^2} \int\int g_n(Q) \, d\sigma,$$

где интегрирование распространено по сфере σ шара C, из которой выкинут произвольно малый сегмент, содержащий внутри себя точку O.

Заставляя теперь n стремиться к ∞, получим

$$u(P_0) \leqslant \frac{1}{4\pi\alpha} \cdot \frac{\alpha - l}{(\alpha + l)^2} \int\int u(Q) \, d\sigma,$$

где интегрирование распространено, как и прежде, по сфере σ, за исключением сколь угодно малого сегмента, окружающего точку O.

Так как правая часть последнего неравенства убывает вместе с диаметром указанного сегмента, то можно перейти к пределу, устремив этот диаметр к нулю и получив сходящийся интеграл

$$u(P_0) \leqslant \frac{1}{4\pi\alpha} \cdot \frac{\alpha - l}{(\alpha + l)^2} \int\int u(Q) \, d\sigma,$$

где интегрирование распространено по всей сфере σ.

Воспользовавшись неравенством (8), получим отсюда

$$\iint \ln T_3\left(\frac{1}{2\alpha\cos\theta}\right)d\sigma \leqslant -\frac{(\alpha+l)^2}{\alpha-l}4\pi\alpha\, u(P_0),$$

что, в связи с неравенством $\ln T_3\left(\frac{1}{2\alpha\cos\theta}\right) \geqslant \ln T\left(\frac{1}{2\alpha}\right)$, доказывает существование интеграла

$$\iint \ln T_3\left(\frac{1}{2\alpha\cos\theta}\right)d\sigma,$$

распространенного на сферу σ.

Легко видеть, что последний интеграл равен

$$8\pi\alpha^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln T_3\left(\frac{1}{2\alpha\cos\theta}\right)\sin\theta\cos\theta\, d\theta \tag{9}$$

и, следовательно, этот последний интеграл сходится. Но интеграл (6) сходится или расходится одновременно с интегралом (9). Действительно, если в интеграле (9) положить $\frac{1}{2\alpha\cos\theta}=r$, то он примет вид:

$$2\pi\int_{\frac{1}{2\alpha}}^{\infty}\frac{\ln T_3(r)}{r^3}\,dr.$$

Таким образом необходимость условия (6) доказана.

Достаточность условия (6). Как мы только что видели, интеграл (6) сходится или расходится одновременно с интегралом $\iint \ln T_3\left(\frac{1}{2\alpha\cos\theta}\right)d\sigma$, распространенным по сфере σ. При этом величина α безразлична, потому что она влияет лишь на нижний предел интеграла (6); в частности, можно считать $\alpha=1$.

Таким образом, допустив существование интеграла (6), мы можем утверждать, что функция $\ln T_3\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)$ суммируема на основной сфере, ограничивающей шар K.

Рассмотрим интеграл Пуассона

$$U(x, y, z)=\frac{1}{4\pi}\iint \ln T_3\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)\frac{1-l^2}{(1+l^2-2\cos\gamma)^{3/2}}\,d\omega,$$

где l — расстояние от центра $A(1, 0, 0)$ до точки $P(x, y, z)$, γ — угол между векторами $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AQ}$, Q — точка интегрирования на основной сфере. Покажем, что гармоническая функция $-U(x, y, z)$ удовлетворяет всем неравенствам (7). Действительно, нам нужно доказать, что

$$-U(x, y, z)\leqslant \ln m_n-\frac{a_n}{\rho} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Заметив, что

$$1=\frac{1}{4\pi}\iint\frac{1-l^2}{(1+l^2-2l\cos\gamma)^{3/2}}\,d\omega,$$

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{4\pi}\iint\frac{1}{2\cos\theta}\,\frac{1-l^2}{(1+l^2-2l\cos\gamma)^{3/2}}\,d\omega,$$

перепишем доказываемые неравенства в виде

$$\frac{1}{4\pi}\iint\left[\ln T_3\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)+\ln m_n-\frac{a_n}{2\cos\theta}\right]\frac{(1-l^2)\,d\omega}{(1+l^2-2l\cos\gamma)^{3/2}}\geqslant 0$$

или

$$\frac{1}{4\pi}\iint\ln\left[T_3\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)m_n e^{-\frac{a_n}{2\cos\theta}}\right]\frac{(1-l^2)\,d\omega}{(1+l^2-2l\cos\gamma)^{3/2}}\geqslant 0.$$

Последние же неравенства вытекают из неравенств

$$T_3\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)\geqslant\frac{e^{\frac{a_n}{2\cos\theta}}}{m_n},$$

справедливых при всех n в силу определения функции $T_3(r)$.

Таким образом достаточность условия (6) доказана.

Замечание. Так как при выполнении условия (6) существует гармоническая функция, подчиненная неравенствам (7), то условие (6) не изменится, если вместо субгармонических функций будем рассматривать лишь гармонические функции.

В заключение заметим, что тот же метод позволяет решить разобранные задачи для пространства любого числа измерений, а именно:

ЗАДАЧА III. *Пусть K есть шар в пространстве $p\geqslant 3$ измерений, с центром $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ радиуса 1. Какие условия нужно наложить на последовательности положительных чисел $\{a_n\}$ и $\{m_n\}$, чтобы гармонические функции*

$$-\frac{a_n}{\rho^{p-2}}+\ln m_n \qquad (n=1, 2, \ldots), \quad \rho=\overline{OP},$$

были мажорантами субгармонической функции?

Введем в рассмотрение следующую функцию $T_p(r)$, определенную для $r>0$:

$$T_p(r)=\sup_{n\geqslant 1}\frac{e^{a_n r^{p-2}}}{m_n}.$$

Необходимое и достаточное условие задачи III заключается в сходимости интеграла

$$\int_1^\infty\frac{\ln T_p(r)}{r^p}\,dr.$$

Математический институт
при Московском гос. университете.

Поступило
23. XI. 1938.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ostrowsky A., Über quasianalytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwickelung, Acta Math., **53** (1929).

[2] Carleman T., Les fonctions quasianalytiques, Paris 1926.

[3] Мандельбройт С. Л., Квазианалитические классы функций, М. 1937.

I. PRIVALOFF. SUR LE PROBLÈME DE WATSON

RÉSUMÉ

Dans le présent article je considère un problème qui est une généralisation d'un problème connu de Watson que voici:

Soit K une sphère dans un espace à $p \geqslant 2$ dimensions de centre $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ et de rayon 1.

Quelles sont les conditions qu'il faut imposer aux suites $\{a_n\}$ et $\{m_n\}$ de nombres positifs pour que les fonctions harmoniques

$$a_n \ln \rho + \ln m_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad \rho = \overline{OP}, \text{ dans le cas } p = 2,$$

ou bien les fonctions harmoniques

$$-\frac{a_n}{\rho^{p-2}} + \ln m_n \; (n = 1, 2, \ldots), \quad \rho = \overline{OP}, \text{ dans le cas } p \geqslant 3,$$

soient des majorantes de la fonction subharmonique?

En posant

$$T(r) = \sup_{n \geqslant 1} \frac{r^{a_n}}{m_n} \qquad \text{pour } r > 0,$$

je démontre que dans le cas $p = 2$ la condition nécessaire et suffisante est la convergence de l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2} dr,$$

et dans le cas $p \geqslant 3$ la convergence de l'intégrale

$$\int_e^\infty \frac{\ln T(r)}{r (\ln r)^{2 + \frac{1}{p-2}}} dr.$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

В. С. ФЕДОРОВ

ОСОБЫЕ ЗНАЧЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ, НЕПРЕРЫВНОЙ НА ВСЮДУ РАЗРЫВНОМ СОВЕРШЕННОМ МНОЖЕСТВЕ ЕЕ ОСОБЫХ ТОЧЕК

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Автор рассматривает однозначную аналитическую функцию, всюду непрерывную на всей сфере комплексного переменного и определяемую интегралом $\int\limits_E \frac{\varphi(\zeta)\,d\sigma}{\zeta - z}$ (функция D. Pompeiu—A. Denjoy). Доказываются некоторые новые интегральные и дифференциальные свойства «особых значений» такой функции, т. е. значений на множестве E. Например разрешается (в § 5) проблема: зная особые значения этой аналитической функции на порции множества E, содержащей такую точку плотности $\zeta = c$ этого множества, в окрестности которой множество E достаточно «густо», указать эффективный метод вычисления $\varphi(c)$ в предположении, что $\varphi(\zeta)$ — непрерывная в точке $\zeta = c$.

§ 1. Постановка основной проблемы

Рассматриваем функцию $f(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, всюду непрерывную, аналитическую и определяемую во всей ее области существования интегралом вида *

$$f(z) = \int\limits_E \frac{\varphi(\zeta)\,d\sigma}{z - \zeta}, \quad . \tag{1}$$

где E — совершенное, всюду разрывное множество конечного диаметра и каждая порция которого имеет положительную поверхностную меру, ζ — переменное интеграции, $\varphi(\zeta)$ — «плотность» — однозначная функция с ограниченным модулем на E, $d\sigma$ — «элемент площади» (как условно говорят и в случае интеграла Лебега).

Такую аналитическую функцию $f(z)$ назовем функцией типа (1). Так как можно «по непрерывности» определять значения $f(z)$ на всем множестве E, которые обозначаем $f(\zeta)$, то естественно ставится проблема об определении «плотности» $\varphi(\zeta)$ этими значениями $f(\zeta)$ — «особыми значениями» аналитической функции $f(z)$, как мы будем говорить, называя также $f(\zeta)$ особой функцией для функции типа (1). Прежде всего ставится

ЗАДАЧА. *Найти необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять однозначная и непрерывная функция $f(\zeta)$, задан-*

* См., например, В. В. Голубев (1), стр. 99—101, и главу VI.

ная на множестве E, для того чтобы значения такой функции являлись особыми значениями некоторой аналитической функции типа (1) *для заданной функции* $\varphi(\zeta)$.

Одно из решений поставленной задачи сразу вытекает, во-первых, из формулы

$$[f(z)]^2 = \int\limits_E \frac{2f(\zeta)\varphi(\zeta)\,d\sigma}{z-\zeta}, \tag{2}$$

и, во-вторых, из разложения интегралов равенств (1) и (2) по степеням $\frac{1}{z}$ для достаточно большого модуля z. Формула (2) нами доказана давно (см., например, ([2]), стр. 11—12); указанное же разложение интегралов дает

$$f(z) = \frac{a_0}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^{k+1}}, \tag{3}$$

$$[f(z)]^2 = \frac{b_0}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{z^{k+1}}, \tag{4}$$

где

$$a_0 = \int\limits_E \varphi(\zeta)\,d\sigma, \qquad b_0 = 2\int\limits_E f(\zeta)\varphi(\zeta)\,d\sigma,$$

$$a_k = \int\limits_E \varphi(\zeta)\zeta^k\,d\sigma, \quad b_k = 2\int\limits_E f(\zeta)\varphi(\zeta)\zeta^k\,d\sigma.$$

Возведя в квадрат ряд (3) и сравнивая полученный ряд с рядом (4), находим

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_E f(\zeta)\varphi(\zeta)\,d\sigma = 0, \\ &2\int\limits_E f(\zeta)\varphi(\zeta)\zeta\,d\sigma = \Big(\int\limits_E \varphi(\zeta)\,d\sigma\Big)^2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &2\int\limits_E f(\zeta)\varphi(\zeta)\zeta^{k+1}\,d\sigma = \sum_{p=0}^{k}\int\limits_E \varphi(\zeta)\zeta^p\,d\sigma\cdot\int\limits_E \varphi(\zeta)\zeta^{k-p}\,d\sigma \\ &\qquad (k=0,1,2,\dots). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Из равенств (5) и вытекает

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $f(\zeta)$ *однозначная и непрерывная функция, заданная на множестве E. Необходимое и достаточное условие того, что эта функция есть «особая функция» аналитической функции типа* (1), *можно выразить так: существует такая функция* $\varphi(\zeta)$, *однозначно определенная «почти всюду» на множестве E и с ограниченным модулем на этом множестве, для которой выполняются все равенства* (5). *При этом* $\varphi(\zeta)$ *не должна равняться нулю почти всюду на какой-либо порции множества E, если мы требуем, чтобы все точки этого множества были особыми для аналитической функции типа* (1), *что и предполагаем («почти всюду» означает всегда: «за исключением множества поверхностной меры нуль»).*

Доказательство. Докажем достаточность поставленного условия. Пусть выполняются все равенства (5) для указанных в теореме функций $f(\zeta)$ и $\varphi(\zeta)$. Составим интегралы (1) и (2), пользуясь этими функциями. Из разложений (3) и (4) и из существования всех равенств (5) имеем: интеграл (2) есть квадрат интеграла (1) для всех значений переменного z вне множества E.

Определяя «по непрерывности» значения этих интегралов в точках множества E и обозначая эти значения для интеграла (1) через $f_1(\zeta)$, а для интеграла (2) через $f_2(\zeta)$, находим, что $f_2(\zeta) = [f_1(\zeta)]^2$, и потому для всех значений z вне множества E

$$\int\limits_E \frac{f(\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\sigma}{z-\zeta} = \int\limits_E \frac{f_1(\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\sigma}{z-\zeta}.$$

Обозначая через $\Phi(z)$ разность значений этих интегралов вне множества E, получим для всякой замкнутой, простой и опрямляемой кривой C, содержащей внутри себя какую-нибудь порцию $\mathscr{E}$ множества E,

$$\int\limits_C \Phi(z)\,dz = 0,$$

или, выполняя интегрирование,

$$\int\limits_{\mathscr{E}} f(\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\sigma = \int\limits_{\mathscr{E}} f_1(\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\sigma. \tag{6}$$

Из равенства (6), существующего для всякой порции множества E, и следует, в силу непрерывности функций $f(\zeta)$ и $f_1(\zeta)$ на E, что во всех точках этого множества имеем $f(\zeta) = f_1(\zeta)$, т. е. $f(\zeta)$ есть в самом деле особая функция аналитической функции типа (1), что и требовалось доказать.

§ 2. Исследование свойств особых значений

Для решения проблемы, поставленной в § 1, исследуем более детально особые значения функции типа (1). Прежде всего отметим известное равенство, справедливое для двух любых точек ζ_1 и ζ_2 множества E:

$$|f(\zeta_2) - f(\zeta_1)| < M \cdot (A \cdot |\ln d| + B) \cdot d, \tag{7}$$

где $d = |\zeta_2 - \zeta_1|$, M — верхняя граница значений $|\varphi(\zeta)|$ на E, A и B — постоянные, зависящие только от данного множества E [см., например, В. В. Голубев ([1]), стр. 100—101].

Укажем также известное предложение: $f(\zeta)$ не может равняться нулю во всех точках какой-либо порции множества E, если только $f(z)$ не равна тождественно нулю, что мы будем предполагать (см. ([2]), стр. 4 и 14).

Докажем теперь новую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть c — точка плотности множества E и пусть (c, ρ) — бесконечно малый круг с центром в этой точке, радиуса ρ. Если есть такая постоянная $a > 0$, что*

$$\frac{1}{\pi\rho^2}\left|\int\limits_{E(c,\,\rho)} \varphi(\zeta)\,d\sigma\right| > a, \text{ при } \rho \to 0, \tag{8}$$

то в таком случае

$$\text{верхняя граница} \left| \frac{f(\zeta)-f(c)}{(\zeta-c)^2} \right| = \infty, \tag{9}$$

где ζ — *текущая точка множества* E.

Эта теорема вытекает из следующих лемм.

ЛЕММА 1. *Если для некоторой точки* c *множества* E *имеем*

$$\left| \frac{f(\zeta)-f(c)}{(\zeta-c)^2} \right| < N, \ N = \text{const} \tag{10}$$

(ζ — *текущая точка множества* E), *то тогда, для* $t \to c$, *где* t *обозначает всегда какую угодно точку плоскости — вне* E *или принадлежащую этому множеству,*

$$\frac{f(t)-f(c)}{t-c} \to 0. \tag{11}$$

З а м е ч а н и е. Формула (11) очевидна для $t=\zeta$. В с я с и л а л е м м ы — существование (11) для любого $t \to c$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для данной функции (1) § 1 построим функцию

$$f_1(z) = [f(z)]^2 - 2f(z)f(c).$$

Из равенства (2) § 1 следует

$$f_1(z) = 2\int\limits_E \frac{f(\zeta)-f(c)}{z-\zeta}\varphi(\zeta)\,d\sigma.$$

Строим далее функции:
пусть для $\zeta \neq c$

$$\theta(\zeta) = \frac{f(\zeta)-f(c)}{\zeta-c}, \tag{12}$$

причем $\theta(c) = \lim\limits_{\zeta \to c}\theta(\zeta) = 0$ (вследствие (10)),

$$\psi(z) = 2\int\limits_E \frac{\theta(\zeta)\varphi(\zeta)\,d\sigma}{z-\zeta}. \tag{13}$$

Из условия (10) следует, что модули функций $\theta(\zeta)$ и

$$\lambda(\zeta) = \frac{2\theta(\zeta)}{\zeta-c},$$

о г р а н и ч е н н ы е н а в с е м м н о ж е с т в е E, а отсюда (и из ограниченности модуля $\varphi(\zeta)$ на E) вытекает н е п р е р ы в н о с т ь н а в с е й п л о с к о с т и следующих функций переменного z:

$$\psi(z) \quad \text{и} \quad J(z) = \int\limits_E \frac{\lambda(\zeta)}{z-\zeta}\varphi(\zeta)\,d\sigma. \tag{14}$$

Далее имеем

$$f_1(z) = \int\limits_E \frac{2\theta(\zeta)(\zeta-c)\varphi(\zeta)\,d\sigma}{z-\zeta}; \quad f_1(c) = -2\int\limits_E \theta(\zeta)\varphi(\zeta)\,d\sigma,$$

так как

$$f_1(z) = -2\int\limits_E \theta(\zeta)\varphi(\zeta)\,d\sigma + (z-c)\int\limits_E \frac{2\theta(\zeta)\varphi(\zeta)\,d\sigma}{z-\zeta},$$

причем значения этих функций в точках множества E определяем

«по непрерывности»; так, например, $\psi(c)=\lim\psi(z)$ при $z\longrightarrow c$. Но для точек z вне E, очевидно, имеем:

$$\psi(z)=\frac{f_1(z)-f_1(c)}{z-c}=[f(z)-f(c)]\cdot\frac{f(z)-f(c)}{z-c}, \tag{15}$$

$$J(z)=\frac{\psi(z)-\psi(c)}{z-c}, \tag{16}$$

— последнее в силу равенства

$$\psi(z)=-\int\limits_E\lambda(\zeta)\varphi(\zeta)\,d\sigma+(z-c)\,J(z).$$

В силу непрерывности функций $f(z)$ и (14) на всей плоскости равенства (15) и (16) сохраняются и при замене переменного z переменным ζ *, где ζ — текущая точка множества E. Для $\zeta\longrightarrow c$ находим конечные пределы:

$$\psi(c)=\lim\psi(\zeta),\quad J(c)=\lim J(\zeta)=\lim_{z\to c}J(z).$$

Отсюда и из (16) и условия (10) получим:

$$\psi(c)=0 \text{ и } J(c)=\lim_{z\to c}\frac{\psi(z)}{z-c}=\lim_{\zeta\to c}\frac{\psi(\zeta)}{\zeta-c}=\lim_{t\to c}\left(\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\right)^2,$$

где t — точка на E или вне E.

Следовательно, на основании (15) существует, при $t\longrightarrow c$, конечный предел отношения

$$\left|\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\right|,$$

где t — точка вне E или на E, что и доказывает утверждение леммы, т. е. (11), вследствие (10).

Прежде чем перейти к доказательству следующей леммы, вводим впервые в этой работе очень важный для изучения поведения аналитических функций типа (1) § 1 вблизи множества E интеграл вида

$$J(c,\ \rho,\ E)=\int\limits_{E(\rho)}[f(\zeta)-f(c)](\zeta-c)\,d\sigma,$$

где c — точка плотности множества E, $E(\rho)$ есть порция этого множества в круге (c,ρ), ζ — переменная интегрирования, $d\sigma$ — «элемент площади» (ср. § 1). Интегралы с тем же подинтегральным выражением, но распространенные соответственно на область (c,ρ) и на множество $R(\rho)=(c,\rho)-E(\rho)$, обозначаем $J(c,\rho)$ и $J(c,\rho,R)$. Эти обозначения сохраним в дальнейшем, полагая также всегда, что ζ — текущая точка множества E, z — точка вне E, t — точка ζ или z.

ЛЕММА 2. *Если для* $\rho\longrightarrow 0$ *имеем:*

$$1)\qquad \frac{1}{\rho^2}\left|\int\limits_{E(\rho)}\varphi(\zeta)\,d\sigma\right|>a>0, \tag{17}$$

$$2)\qquad |f(t)-f(c)|<N\rho, \tag{18}$$

* ζ отлично от c.

где $\varphi(\zeta)$ — *«плотность» функции* $f(t)$ *типа* (1) § 1, a *и* N — *постоянные, и неравенство* (18) *имеет место для всех точек* t *круга* (c, ρ), *то, при этих условиях, отношение* $\frac{1}{\rho^4} J(c, \rho, E)$ *не может стремиться к нулю вместе с* ρ.

Доказательство. Известно, что для всякой функции типа (1) § 1 и для всякой окружности $C(r)$ с центром в точке c и радиуса r имеем «интегральную формулу D. Pompeiu»:

$$\int\limits_{C(r)} f(t)\,dt = 2\pi i \int\limits_{E(r)} \varphi(\zeta)\,d\sigma \tag{19}$$

(см., например, ([2]), стр. 11). Кроме того, очевидно

$$J(c, \rho) = \frac{1}{i} \int\limits_0^\rho \int\limits_{C(r)} f(t)\,dt\,r\,dr. \tag{20}$$

Далее, при условии (18),

$$|J(c, \rho, R)| < N\rho^2 |R(\rho)|, \tag{21}$$

где, как всегда, $|R(\rho)|$ — поверхностная мера множества $R(\rho)$.

Наконец,

$$J(c, \rho, E) = J(c, \rho) - J(c, \rho, R), \tag{22}$$

причем

$$\frac{1}{\rho^2} |R(\rho)| \to 0 \text{ вместе с } \rho. \tag{23}$$

Из (17), (19) и (20) следует, что $\frac{1}{\rho^4} J(c, \rho)$ не может стремиться к нулю вместе с радиусом ρ. Отсюда и из (21), (22) и (23) и следует утверждение леммы.

Теперь уже легко доказать теорему этого параграфа, т. е. несовместимость условий (10) и (17), так как из условия (10) очевидно следует

$$\frac{1}{\rho^4} J(c, \rho, E) \to 0 \quad (\text{для } \rho \to 0),$$

что противоречит условию (17), в силу леммы 2, ибо, в силу леммы 1, имеем неравенство (18) для всех точек круга (c, ρ).

§ 3. Случай $\varphi(\zeta)$, равной нулю в некоторой точке особого множества

Таким заголовком мы обозначаем тот случай, когда имеем

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho^2} \int\limits_{E(\rho)} \varphi(\zeta)\,d\sigma = 0, \tag{24}$$

где $E(\rho) = E \cdot (c, \rho)$ и где c — какая-нибудь точка множества E, например точка плотности E. Докажем, что в этом случае можно построить для всякого данного натурального числа n такую функцию $f(t)$ типа (1) § 1, для которой

$$\lim_{t \to c} \frac{f(t) - f(c)}{(t - c)^n} = 0. \tag{25}$$

Построение функции $f(t)$

Пусть

$$F(t)=\int\limits_E \frac{d\sigma}{t-\zeta}, \quad f_0(t)=[F(t)]^{n+2}.$$

Тогда (см. § 1 — литературное указание к формуле (2))

$$f_0(t)=\int\limits_E \frac{\varphi(\zeta)\,d\sigma}{t-\zeta}, \text{ где } \varphi(\zeta)=(n+2)\,[F(\zeta)]^{n+1}.$$

Откуда имеем, сравнивая разложения $f_0(t)$ и $F(t)$ по степеням $\left(\frac{1}{t}\right)$ для достаточно большого $|t|$,

$$\int\limits_E \varphi(\zeta)\,\zeta^k\,d\sigma=0 \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, n). \tag{26}$$

Положим

$$f(t)=f_0(t)\cdot(t-c)^{n+1}.$$

Эта функция $f(t)$ есть функция типа (1) § 1, так как, на основании (26) и равенства $(t-c)=(t-\zeta)+(\zeta-c)$, находим

$$f(t)=\int\limits_E \frac{(\zeta-c)^{u+1}\cdot\varphi(\zeta)\,d\sigma}{t-\zeta}.$$

Очевидно, что эта функция обладает свойством (25).

§ 4. Дальнейшие свойства функций типа (1)

Продолжим исследование поведения функции типа (1) § 1 вблизи точки плотности c множества E, предполагая непрерывность функции $\varphi(\zeta)$ в точке c. Докажем прежде всего, что

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho^3}\int\limits_{(c,\,\rho)}[f(t)-f(c)]\,d\sigma=0. \tag{27}$$

Имеем

$$f(t)=f_\rho(t)+h_\rho(t), \tag{28}$$

где

$$f_\rho(t)=\int\limits_{E(\rho)}\frac{\varphi(\zeta)\,d\sigma}{t-\zeta}, \quad h_\rho(t)=\int\limits_{E-E(\rho)}\frac{\varphi(\zeta)\,d\sigma}{t-\zeta}. \tag{29}$$

Далее (ср. § 1)

$$[f_\rho(t)]^2=2\int\limits_{E(\rho)}\frac{f_\rho(\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\sigma}{t-\zeta},$$

откуда получим равенства, аналогичные равенствам (5) § 1; например

$$\int\limits_{E(\rho)} f_\rho(\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\sigma=0. \tag{30}$$

Затем имеем

$$f_\rho(c)=\varphi(c)\,F_\rho(c)+P_\rho(c), \tag{31}$$

где

$$F_\rho(c)=\int\limits_{E(\rho)}\frac{d\sigma}{c-\zeta}, \quad P_\rho(c)=\int\limits_{E(\rho)}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(c)}{c-\zeta}\,d\sigma.$$

Исследуем $F_\rho(c)$. Положим $R(\rho)=(c,\rho)-E(\rho)$; отметим, что

$$F_\rho(c)=-\int\limits_{R(\rho)}\frac{d\sigma}{c-z},\ \text{так как}\ \int\limits_{(c,\rho)}\frac{d\sigma}{c-t}=0$$

(z и t — переменные интегрирования в интегралах, распространенных на $R(\rho)$ и (c,ρ) соответственно). Пусть $|R(\rho)|=\omega_\rho$ и пусть δ есть радиус круга γ с центром в точке c и площади ω_ρ. Имеем

$$\left|\int\limits_{R(\rho)}\frac{d\sigma}{c-z}\right|<\int\limits_{\gamma}\frac{d\sigma}{|c-t|},$$

где t — текущая точка круга γ. Отсюда

$$|F_\rho(c)|<2\pi\delta, \tag{32}$$

причем $\frac{\delta}{\rho}\to 0$ вместе с ρ, так как точка c — точка плотности множества E.

Известно, что верхняя граница модуля функции типа (1) § 1 на всей плоскости меньше $2\pi Md$, где M — верхняя граница модуля $\varphi(\zeta)$ на множестве E, а d — диаметр множества E («неравенство D. Pompeiu» — см., например, ([1]), стр. 137).

Поэтому

$$|f_\rho(t)|<4\pi\rho M, \tag{33}$$

а также

$$|P_\rho(c)|<4\pi\rho\,\mu_\rho, \tag{34}$$

где μ_ρ равно верхней границе $|\varphi(\zeta)-\varphi(c)|$ на $E(\rho)$. Согласно условию, при $\rho\to 0$ имеем

$$\mu_\rho\to 0. \tag{35}$$

Из (31), (32), (34) и (35) следует

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho^3}\int\limits_{E(\rho)}|f_\rho(c)|\,d\sigma=0. \tag{36}$$

Из (30), (35) и (36) имеем

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho^3}\int\limits_{E(\rho)}f_\rho(\zeta)\,d\sigma=0. \tag{37}$$

Наконец, для функции $h_\rho(t)$, как функции везде непрерывной и голоморфной внутри круга (c,ρ), имеем

$$\int\limits_{(c,\rho)}[h_\rho(t)-h_\rho(c)]\,d\sigma=0. \tag{38}$$

Из (36), (37) и (38) и выводим (27), поскольку c — точка плотности множества E и вследствие (33).

Кроме равенства (27), докажем при тех же условиях, что

$$\lim\frac{1}{\rho^4}J(c,\rho)=\frac{\pi^2}{2}\varphi(c). \tag{39}$$

Доказательство вытекает сразу из равенств (19) и (20) § 2. Из (27) и (39) следует, что для всякой последовательности кругов $\Gamma_k = (c, \rho_k)$ при $\rho_k \to 0$ имеем

$$\frac{1}{\rho_k^4} \int_{\Gamma_k} [f(t) - f(c)]\,(t - t_k)\,d\sigma \to \frac{\pi^2}{2}\,\varphi(c), \tag{40}$$

где t_k — какая-угодно точка внутри или на окружности Γ_k и постоянная для данного k. Из (39) следует также, что в случае $\varphi(c)$, отличного от нуля, имеем:

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho^3} \int_{(c,\,\rho)} |f(t) - f(c)|\,d\sigma \neq 0. \tag{41}$$

§ 5. Определение значения $\varphi(c)$ в какой-нибудь точке плотности особого множества значениями $f(\zeta)$ в особых точках вблизи этой точки плотности

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $f(t)$ — функция типа* (1) § 1, *плотность которой $\varphi(\zeta)$ — непрерывная в точке c, где c — точка плотности множества E и притом такая, что*

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{|R(\rho)|\,\ln\rho}{\rho^2} = 0, \tag{42}$$

где $R(\rho)$ — множество точек внутри круга (c, ρ) и вне множества E. В таком случае, для всякой последовательности кругов γ_k, радиусы которых ρ_k образуют нуль-последовательность и которые все содержат точку c, имеем

$$\lim_{\rho_k \to 0} \frac{1}{\rho_k^4} \int_{E_k} [\,f(\zeta) - f(c)\,]\,(\zeta - c_k)\,d\sigma = \frac{\pi^2}{2}\,\varphi(c), \tag{43}$$

где E_k — порция множества E в круге γ_k, c_k — центр этого круга.

Замечание. Допускается и тот случай, когда окружности всех кругов γ_k проходят через точку c, или когда точка c расположена вне всех или некоторых кругов γ_k при одном условии, что, полагая $\rho_k' = |c_k - c| + \rho_k$, имеем: $\rho_k' < a\rho_k$, где a — постоянная, причем $c_k \to c$, $\rho_k \to 0$.

Доказательство. 1. Сперва докажем, что

$$\lim_{\rho_k \to 0} \frac{1}{\rho_k^4} \int_{\gamma_k} [f(t) - f(c)]\,(t - c_k)\,d\sigma = \frac{\pi^2}{2}\,\varphi(c). \tag{44}$$

Для этого рассмотрим один из кругов γ_k и применим к интегралу формулы (44) преобразования (20) и (19) § 2, понимая под $C(r)$ окружность, концентрическую с окружностью круга γ_k и меньшего радиуса. Далее, заметим, что

$$\int_{E(r)} \varphi(\zeta)\,d\sigma = \varphi(c)\,\pi r^2 + \vartheta_1(r) + \vartheta_2(r),$$

где $|\vartheta_1(r)| < |\varphi(c)| \cdot [\pi\rho_k^2 - |E_k|]$ и где $|\vartheta_2(r)| < \mu_k \cdot \pi r^2$, если μ_k равно верхней границе $|\varphi(\zeta) - \varphi(c)|$ на E_k; откуда и следует (44) на основании формулы (20), в которой заменим ρ через ρ_k.

2. Теперь докажем, полагая $R_k=\gamma_k-E_k$, что

$$\lim_{\rho_k\to 0}\frac{1}{\rho_k^4}\int\limits_{R_k}[f(t)-f(c)](t-c_k)\,d\sigma=0. \qquad (45)$$

В самом деле, применяя известное неравенство A. Denjoy для функций типа (1) § 1 (см., например, (1), стр. 101)

$$|f(t)-f(c)|<M(A\cdot|t-c|+B\cdot|t-c|\cdot|\ln|t-c||), \qquad (46)$$

где M — верхняя граница функции $|\varphi(\zeta)|$ на множестве E, A и B — постоянные для данного множества, найдем, что, при достаточно малых ρ_k и $|c-c_k|$, имеем: модуль интеграла левой части формулы (45) меньше $MQ\rho_k^2|\ln\rho_k|\cdot|R_k|$, где Q—постоянная, а также $|\ln\rho_k|\cdot|R_k|<P\varepsilon_k\rho_k^2$, где P — постоянная и $\varepsilon_k\to 0$ при $k\to\infty$.

Отсюда и получаем (45). Из (44) и (45) и следует (43), что и требовалось доказать.

Следствия. При условиях теоремы и для $\varphi(c)$, отличной от нуля, имеем, вследствие (43),

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho^3}\int\limits_{E(\rho)}|f(\zeta)-f(c)|\,d\sigma\neq 0, \qquad (47)$$

и поэтому нет такой постоянной $\alpha>0$, чтобы было для всех особых точек ζ вблизи точки c

$$|f(\zeta)-f(c)|<N|\zeta-c|^{1+\alpha},$$

где N — постоянная. Вместе с тем из условия (42) и неравенства (46) следует:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho^3}\int\limits_{R(\rho)}|f(t)-f(c)|\,d\sigma=0,$$

откуда и из (27) § 4 следует, что в случае (42) имеем соотношение

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho^3}\int\limits_{E(\rho)}[f(\zeta)-f(c)]\,d\sigma=0, \qquad (48)$$

которое полезно сопоставить с формулой (47).

Независимо от того, выполняется ли условие (42) или нет, и в случае всякой ограниченной по модулю функции $\varphi(\zeta)$ — непрерывной в точке c или разрывной — справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4. *Если c — точка плотности множества E и если для всех достаточно малых радиусов ρ имеем*

$$\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{E(\rho)}\varphi(\zeta)\,d\sigma>a>0,$$

где a — постоянная, то найдется такая нуль-последовательность радиусов ρ_i и в каждой порции E_i множества E в круге (c,ρ_i) такая точка ζ_i, что $\frac{1}{\rho_i^4}\int\limits_{E_i}[f(\zeta)-f(\zeta_i)]\,d\sigma\to\infty$ при $\rho_i\to 0$.

Доказательство (от противного). Допустим существование такой постоянной (конечной) N, что для любой точки ζ_i множества $E(\rho)$ и для всякого радиуса ρ имеем

$$\frac{1}{\rho^4}\left|\int_{E(\rho)}[f(\zeta)-f(\zeta_i)]\,d\sigma\right|<N. \tag{49}$$

В таком случае из (49) следует, что для двух любых точек ζ_i и ζ_h множества $E(\rho)$ имеем при всяком ρ

$$|f(\zeta_i)-f(\zeta_h)|<A\rho^2,$$

где A — постоянная. Но отсюда вытекает, что для всякой последовательности $\{\zeta_i\}$, где $\zeta_i \to c$, находим, рассматривая окружности с центром в точке c и проведенные через эти точки ζ_i,

$$|f(\zeta_i)-f(c)|<A|\zeta_i-c|^2,$$

а это противоречит теореме § 2, ввиду условий настоящей теоремы.

Энергетический институт. Иваново, Поступило 3.XI.1938.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Голубев В. В., Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек. Записки Моск. универс., Физ.-мат. отд., вып. 29, 1916.

[2] Fedoroff W., Sur les fonctions analytiques partout continues. Comptes rendus des séances de la Soc. des Sciences et des Lettres de Varsovie, XXIV, 1931, classe III, p. 1—16.

W. FEDOROFF. SUR LES VALEURS SINGULIÈRES D'UNE FONCTION ANALYTIQUE ET CONTINUE SUR L'ENSEMBLE PARTOUT DISCONTINU DE SES POINTS SINGULIERS

RÉSUMÉ

Considérons la fonction analytique, uniforme et partout continue de D. Pompeiu—A. Denjoy («la fonction (D)»):

$$f(z)=\int_E \frac{\varphi(\zeta)\,d\sigma}{z-\zeta},$$

où E est un ensemble de points parfait partout discontinu et dont chaque portion est de mesure superficielle positive; ζ est un point quelconque de E, et z est un point quelconque hors de E. La fonction $|\varphi(\zeta)|$ est bornée sur E et $d\sigma$ est «l'élément d'aire».

Posons pour chaque point de E

$$f(\zeta)=\lim_{z\to\zeta} f(z).$$

Cette fonction $f(\zeta)$ est la «fonction singulière» pour la fonction analytique $f(z)$ — chaque point de E étant un point singulier de cette fonction analytique.

Désignons par (c,ρ) le cercle de centre c et de rayon ρ. Soit $E(c,\rho)$ la portion de E dans ce cercle et $R(c,\rho)=(c,\rho)-E(c,\rho)$.

L'auteur démontre les théorèmes suivants:

1. Pour qu'une fonction $f(\zeta)$ donnée a priori sur E uniforme et continue sur E soit «la fonction singulière» de la fonction analytique (D), où la fonction $\varphi(\zeta)$ est donnée, il faut et il suffit que l'on ait

$$\int_E f(\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\sigma = 0$$

$$2\int_E f(\zeta)\,\varphi(\zeta)\cdot\zeta^{k+1}\,d\sigma = \sum_{p=0}^{k}\int_E \varphi(\zeta)\,\zeta^p\,d\sigma\cdot\int_E \varphi(\zeta)\,\zeta^{k-p}\,d\sigma$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ ad\ inf.)$$

2. Soient: c un point d'épaisseur superficielle de E *

$$\mu(c,\rho) = \frac{1}{\pi\rho^2}\left|\int_{E(c,\rho)} \varphi(\zeta)\,d\sigma\right|,$$

$$\left.\begin{array}{l} M_\varepsilon(c) = \text{borne sup. } \mu(c,\rho) \\ m_\varepsilon(c) = \text{borne inf. } \mu(c,\rho) \end{array}\right\} \textit{pour } 0 < \rho \leqslant \varepsilon,$$

$$M(c) = \lim_{\varepsilon\to 0} M_\varepsilon(c),\quad m(c) = \lim_{\varepsilon\to 0} m_\varepsilon(c).$$

Cela posé, dans le cas $m(c) > 0$ on a

$$\text{borne sup.}\left|\frac{f(\zeta) - f(c)}{(\zeta - c)^2}\right| = \infty,$$

et dans le cas $M(c) = 0$ on peut construire pour chaque entier positif n une fonction (D) telle que l'on ait

$$\lim_{t\to c}\frac{f(t) - f(c)}{(t - c)^n} = 0,$$

t étant sur E ou hors de E (l'ensemble étant fixe).

3. Soit c un point d'épaisseur superficielle de E et de plus tel que l'on ait

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{|R(c,\rho)|\ln\rho}{\rho^2} = 0.$$

Soit $\{(c_k, \rho_k)\}$ une suite de cercles tels que l'on ait:

1) chaque cercle contient ce point c,

2) $c_k \longrightarrow c$ et $\rho_k \longrightarrow 0$ pour $k \longrightarrow \infty$.

Cela posé, pour chaque fonction (D) ayant la fonction $\varphi(\zeta)$ continue pour $\zeta = c$ on a

$$\frac{1}{\rho_k^4}\cdot\int_{E(c_k,\rho_k)} (f(\zeta) - f(c))\cdot(\zeta - c)\,d\sigma \longrightarrow \frac{\pi^2}{2}\,\varphi(c).$$

4. Pour chaque point c d'épaisseur superficielle de l'ensemble E et pour chaque fonction (D), pourvu que $m(c) > 0$, il existe une suite $\{E_i\}$ où $E_i = E(c, \rho_i)$ et $\rho_i \longrightarrow 0$ et dans chaque E_i un tel point ζ_i que l'on a

$$\frac{1}{\rho_i^4}\cdot\int_{E_i}\{f(\zeta) - f(\zeta_i)\}\,d\sigma \longrightarrow \infty\,.$$

---

* On dit qu'un point c est point d'épaisseur superficielle d'un ensemble mesurables E, lorsque $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{|E(c,\rho)|}{\pi\rho^2} = 1$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

П. С. НОВИКОВ

О МНОЖЕСТВАХ ЭФФЕКТИВНО-НЕСЧЕТНЫХ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье вводится понятие эффективной несчетности и доказывается, что всякое эффективно-несчетное множество содержит совершенное ядро.

Рассмотрим бэровское пространство или множество бесконечных последовательностей натурального ряда, в котором определен известным образом предельный переход. Будем называть n-ый элемент бесконечной последовательности натуральных чисел n-ым знаком разложения данной точки бэровского пространства.

I определение. Рассмотрим некоторое множество последовательностей точек бэровского пространства $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots\}$. Мы будем говорить, что каждая последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ эффективно определяет точку бэровского пространства $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$, если каждое конечное число знаков точки $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ вполне определяется конечным числом знаков конечного числа членов нашей последовательности.

II определение. Мы будем называть множество точек бэровского пространства эффективно-несчетным, если каждая последовательность точек этого множества эффективно определяет точку того же множества, не принадлежащую данной последовательности.

Цель настоящей работы — показать, что *всякое эффективно-несчетное множество содержит совершенное подмножество и поэтому имеет мощность континуума.*

Обратное положение очевидно.

Доказательство. Допустим, что множество E содержится в бэровском пространстве и является эффективно-несчетным. В дальнейшем мы будем рассматривать бэровское пространство как множество иррациональных точек оси OX, заданных разложением в непрерывную дробь. Так как E эффективно-несчетно, то, в силу определения, существует функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, определенная на всех последовательностях точек множества E. Рассмотрим произвольную последовательность точек бэровского пространства

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ \cdots, a_{1m}, \cdots),\\
x_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ \cdots, a_{2m}, \cdots),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n &= (a_{n1}, a_{n2}, \ \cdots, a_{nm}, \cdots),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

где a_{nm} — знаки соответствующих точек. Возьмем числовую ось OT; каждой последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ на оси OT отвечает иррациональная точка t, неполные частные которой будут $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \ldots, a_{nm}, \ldots)$. Очевидно, $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ будут однозначными функциями точки t:

$$
\left.
\begin{aligned}
x_1 &= f_1(t),\\
x_2 &= f_2(t),\\
&\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\\
x_n &= f_n(t),\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
\right\} \qquad (a)
$$

и, с другой стороны, каждой последовательности иррациональных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ отвечает только одна точка t. При этом каждая функция $f_n(t)$ будет непрерывна на множестве иррациональных точек оси OT.

Возьмем плоскость XOT и на ней все кривые, уравнения которых являются функциями $f_n(t)$. Мы получим плоское множество, которое обозначим G.

Отберем те точки оси OT, для которых $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ принадлежат множеству E; обозначим это множество $\mathcal{E}$. Из всякого счетного подмножества множества E образуем бесчисленное множество последовательностей, перенумеровывая его элементы различным образом. Следовательно, каждому такому счетному множеству отвечает некоторое множество точек оси OT. Обозначим его $\mathcal{E}_p$, где p есть данное счетное множество.

Покажем, что $\mathcal{E}_p$ есть B-множество. Рассмотрим множество p, расположенное на оси OX, и проведем через каждую его точку прямую, параллельную оси OT. Множество всех таких прямых обозначим L. Два множества $G-L$ и $L-G$ пересекаются с каждой прямой $t=\text{const}$ не более как по счетному множеству и каждое из них есть B-множество. Следовательно, на основании известной теоремы, проекции $G-L$ и $L-G$ на ось OT будут B-множества; обозначим их соответственно H_1 и H_2. Множество $C(H_1+H_2)$ будет также B-множеством и будет, очевидно, совпадать с $\mathcal{E}_p$.

Ясно, что $\mathcal{E}_p \subset \mathcal{E}$, и если p и p' не совпадают, то $\mathcal{E}_p$ и $\mathcal{E}_{p'}$ не имеют общих точек.

На основании условия эффективной несчетности E мы будем иметь функцию $x=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ такую, что x определяется эффективно по последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Рассмотрим функцию

$$x=\varphi[f_1(t),\ f_2(t),\ \ldots,\ f_n(t),\ \ldots]=\psi(t).$$

Так как любое конечное число знаков $x=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ вполне определяется конечным числом знаков конечного числа членов последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, то ясно, что любое конечное число знаков x определяется конечным числом знаков точки t. Отсюда немедленно следует непрерывность функции $\psi(t)$, которая осуществляет непрерывное отображение множества $\mathscr{E}$ в часть E, и мы можем написать: $\psi(\mathscr{E})\subset E$.

Возьмем счетное множество точек $p\subset E$, всюду плотное на E, и рассмотрим множество $E_p=\psi(\mathscr{E}_p)$.

Так как $\mathscr{E}_p$ есть B-множество, то E_p есть A-множество; если оно несчетно, то теорема доказана, так как тогда E_p содержит совершенное подмножество и, следовательно, E также содержит совершенное подмножество. Предположим, что E_p счетно. Множества E_p и p не имеют общих точек, так как E_p состоит из значений функции $\psi(t)=$ $=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, по условию отличающихся от значений $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Рассмотрим множества p и $p+E_p$. Множества $\mathscr{E}_p$ и $\mathscr{E}_{p+E_p}$ не имеют общих точек, так как p и $p+E_p$ отличаются друг от друга. Перенумеруем точки множеств p, $p+E_p$, E_p; получим три последовательности:

$$\begin{array}{ll} p & x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \\ p+E_p & x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots \\ E_p & y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots \end{array}$$

В дальнейшем индексы у точек x_n будем всегда считать теми же, что и в данном разложении.

Заметим, что все y_n отличаются от x_m в силу свойств функции $x=\psi(t)$.

Обозначим множество точек оси OT, для которых $\psi(t)=y_n$, через l_n. Никакое l_n не может иметь предельных точек на $\mathscr{E}_{p+E_p}$. Если бы такая точка t_0 существовала, то $\psi(t_0)=y_k$, где k есть номер того множества l_n, для которого t_0 есть предельная точка. Этого, однако, не может быть в силу свойств функции ψ.

Покажем, с другой стороны, что по крайней мере одно из l_n имеет предельные точки на $\mathscr{E}_{p+E_p}$. Для этого, очевидно, достаточно показать, что на какое бы счетное число частей мы ни разбили множество $\mathscr{E}_p$, одна из них будет иметь предельные точки на $\mathscr{E}_{p+E_p}$. Выделим из нашего бэровского пространства, представляющего собой множество всех последовательностей натурального ряда, совокупность всех последовательностей, в каждой из которых нет повторяющихся чисел. Это также будет бэровское пространство. Обозначим его буквой R. Множество всех перестановок натурального ряда будет 2-й категории на R. Обозначим его R'.

Последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ отвечает некоторая точка t, принадлежащая $\mathcal{E}_p$. Пусть $(n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ — произвольная точка множества R'; поставим ей в соответствие точку множества $\mathcal{E}_p$, которая отвечает последовательности $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ Таким образом мы получим взаимно однозначное соответствие между R' и $\mathcal{E}_p$. Разбиению множества $\mathcal{E}_p$ на l_n отвечает разбиение множества R' на некоторые множества R'_n. По крайней мере одно из множеств R'_n, например R'_N, будет плотно на каком-нибудь бэровском интервале пространства R. Бэровский интервал R представляет собой множество последовательностей $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, у которых фиксированы первые q знаков:

$$n_1 = n_1^0, \quad n_2 = n_2^0, \ \ldots, \ n_q = n_q^0.$$

Следовательно, для всякой конечной последовательности различных целых чисел

$$n_1^0, \quad n_2^0, \ \ldots, \ n_q^0, \quad n_{q+1}, \ldots, n_k,$$

где $n_{q+1}, \ldots, n_k$ и k — произвольные целые числа, найдутся точки множества R_N, имеющие в качестве первых знаков заданную последовательность.

Возьмем теперь множество $p+E_p$ и перенумеруем его в последовательность так, что q первых членов этой последовательности будут

$$x_{n_1^0}, \quad x_{n_2^0}, \ \ldots, \ x_{n_q^0}.$$

Это сделать всегда можно, так как все числа $x_n \subset p$ и, следовательно, в $p+E_p$.

Выбранную последовательность мы запишем в следующем виде

$$x_{n_1^0}, \quad x_{n_2^0}, \ \ldots, \ x_{n_q^0}, \quad x'_{n_{q+1}}, \ldots, x'_{n_{q+i}}, \ldots \tag{α}$$

Заметим, что p есть множество, плотное на E, и, следовательно, на $p+E_p$. Если удалить из p конечное число точек $x_{n_1^0}, x_{n_2^0}, \ldots, x_{n_q^0}$, то останется множество p', попрежнему плотное на $p+E_p$. Выберем последовательность положительных чисел $\varepsilon_j \to 0$; каждому j поставим в соответствие группу чисел $x_{n_1^j}, x_{n_2^j}, \ldots, x_{n_j^j}$ из множества p' так, что

$$|x'_{n_{q+1}} - x_{n_1^j}| < \varepsilon_j, \quad |x'_{n_{q+2}} - x_{n_2^j}| < \varepsilon_j, \ldots, |x'_{n_{q+j}} - x_{n_j^j}| < \varepsilon_j.$$

Это всегда можно сделать, так как p' плотно на $p+E_p$. Поставим теперь в соответствие тому же номеру j точку из множества R'_N

$$(n_1^0, \quad n_2^0, \ldots, n_q^0, n_{q+1}, \ldots, n_{q+j}, \ldots),$$

так что

$$n_{q+1}=n_1^j,\ \ n_{q+2}=n_2^j,\ \ldots,\ n_{q+j}=n_j^j.$$

Это можно сделать в силу плотности R'_N на бэровском интервале $(n_1^0, \ldots, n_q^0)$.

Также мы можем поставить в соответствие номеру j последовательность чисел

$$x_{n_1^0}, \ldots, x_{n_q^0},\ \ x_{n_1^j}, \ldots, x_{n_j^j},\ \ x_{n_{q+j+1}}, \ldots, \tag{β}$$

где последовательность номеров есть точка пространства R'_N. В силу соответствия между R' и $\mathcal{E}_p$, полученной последовательности отвечает точка $t_j \subset l_N$. Последовательности (α) отвечает точка $t^* \subset \mathcal{E}_{p+E_p}$.

Покажем, что $t^* = \lim\limits_{j \to 0} t_j$. Иначе говоря, покажем, что для любого целого числа h, начиная с некоторого номера g_h, h первых знаков t^* и t_j совпадают, t_j отвечает последовательности (β). На основании определения зависимости (а) любое конечное число знаков t_j определяется конечным числом знаков чисел последовательности (β). Мы, очевидно, можем выбрать g_h настолько большим, что числа $x_{n_1^j}, \ldots, x_{n_k^j}$ будут иметь h первых общих знаков соответственно с числами $x'_{n_{q+1}}, \ldots, x'_{n_{q+h}}$ для всех $j > g_h$. Это будет иметь место при достаточной малости чисел ε_j. Но тогда во всяком случае первые h знаков числа t^* и первые h знаков t_j совпадут при $j > g_h$.

Итак, t^* есть предельная точка для множества l_N и мы пришли к противоречию, так как доказали уже ранее, что никакое множество l_N не имеет предельных точек на $\mathcal{E}_{p+E_p}$.

Отсюда вытекает, что E_p не может быть счетным, а так как оно есть A-множество, то содержит совершенное ядро; следовательно, и множество E также содержит совершенное ядро.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
22.XI.1938.

P. NOVIKOFF. SUR LES ENSEMBLES EFFECTIVEMENT NON DÉNOMBRABLES

RÉSUMÉ

Considérons l'espace de Baire ou bien l'ensemble de toutes les suites infinies d'entiers positifs. Le n-ième élément d'une suite infinie d'entiers positifs sera appelé n-ième chiffre du développement d'un point donné.

Nous introduisons les definitions suivantes:

Définition I. Etant donné une suite de points dans l'espace de Baire, soit $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots\}$, nous dirons qu'elle définit effectivement un point $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ de cet espace, si un nombre fini quelconque de chiffres du développement de $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ est parfaitement défini à partir d'un nombre fini de chiffres des développements d'un nombre fini de termes de la suite considérée.

Définition II. Un ensemble est dit effectivement non dénombrable, si l'on peut faire correspondre à chaque suite dénombrable de ses éléments un élément de cet ensemble effectivement défini par cette suite et ne lui appartenant pas.

Le but du présent article est de démontrer que *chaque ensemble effectivement non dénombrable contient un ensemble parfait, donc a la puissance du continu.*

Le réciproque est évident.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

А. А. ЛЯПУНОВ

НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ УНИФОРМИЗАЦИИ ПЛОСКИХ CA- и A_2'-МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком **И. М. Виноградовым**)

В статье выделяется ряд случаев, когда плоское CA- или A_2'-множество униформизируется посредством CA- и A_2'-кривых, и рассматриваются приложения этих случаев к теории A_2'-множеств и к некоторым редукциям проблемы о совершенном ядре в CA-множествах.

В ряде работ П. С. Новиков ([1, 2]) и я ([3]) рассматривали некоторые случаи униформизируемости плоских CA- и A_2'-множеств множествами того же типа. Некоторые утверждения в моей статье были высказаны без доказательства. Целью настоящей статьи является выделение некоторых новых случаев такой же униформизируемости и доказательство указанных выше утверждений.

§ 1

Прежде всего напомним некоторые определения.

Пусть E есть некоторое плоское множество. Множество M всех точек $(x_0, y_0) \subset E$ и имеющих то свойство, что какова бы ни была точка $(x_0, y_1) \subset E$, всегда $y_0 \leqslant y_1$, называют множеством Мазуркевича от множества E ([4]).

Пусть теперь E есть плоское CA-множество, определенное решетом C. Следуя П. С. Новикову ([2]), мы назовем точку $(x_1, y_1) \subset E$ точкой единственного индекса, если во всякой точке $(x_1, y_2) \subset E$ индекс решета C отличен от индекса решета C в точке (x_1, y_1).

Ясно, что на всякой прямой $x = \text{const}$ точек единственного индекса не больше чем $\aleph_1$. Множество всех точек единственного индекса называется множеством точек единственного индекса.

П. С. Новиков показал, что множество точек единственного индекса от плоского CA-множества также есть CA-множество ([2]).

В основе всего дальнейшего лежит следующая лемма (ср. ([3])).

ЛЕММА I. *Сумма множеств Мазуркевича всех конституант плоского CA-множества есть также CA-множество.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{E}$ есть плоское CA-множество и C решето, его определяющее ($\mathscr{E} \subset OXY$; $C \subset OXYT$). Рассмотрим в пространстве $OXYZ$ множество E всех точек (x, y, z) таких, что $(x, y) \subset \mathscr{E}$ и $z \geqslant y$. E есть CA-множество. Его можно задать решетом C'

($C' \subset OXYZT$), имеющим то свойство, что индекс решета C' в точке (x, y, z), где $z \geqslant y$, равен индексу решета C в точке (x, y). Рассмотрим теперь совокупность всех прямых пространства $OXYZ$, параллельных оси OY. Пусть N есть множество точек единственного индекса множества E относительно этих прямых. N есть CA-множество. Часть множества N, лежащая в плоскости $z=y$, также есть CA-множество. То же можно сказать и о проекции этой части на плоскость OXY. Обозначим эту проекцию через M. Мы покажем, что множество M совпадает с множеством M', являющимся суммой множеств Мазуркевича всех конституант множества $\mathcal{E}$.

Пусть точка $(x_0, y_0) \subset M'$ и индекс решета C в этой точке есть α. Тогда для части множества $\mathcal{E}$, лежащей на отрезке $x=x_0$, $y \leqslant y_0$, точка (x_0, y_0) будет единственной точкой, в которой индекс решета C есть α.

Так как часть множества E, лежащая на отрезке $x=x_0$, $y \leqslant y_0$, $z=z_0 \geqslant y_0$, конгруэнтна, включая индексы, упомянутой части множества $\mathcal{E}$, то точка (x_0, y_0, z_0), где $z_0=y_0$, будет точкой единственного индекса множества E на прямой $x=x_0$, $z=y_0$. Таким образом точка (x_0, y_0, z_0), где $z_0=y_0$, принадлежит одновременно множеству N и плоскости $y=z$. Следовательно, точка $(x_0, y_0) \subset M$. Или $M \supset M'$.

Пусть теперь точка $(x_0, y_0) \subset M$. Следовательно, точка (x_0, y_0, z_0), где $z_0=y_0$, входит в N, т. е. она является одной из точек единственного индекса множества E на прямой $x=x_0$, $z=y_0$. Отсюда вытекает, что на отрезке $y \leqslant y_0$, $x=x_0$ множество $\mathcal{E}$ не имеет точек, в которых индекс решета C равен его индексу в точке (x_0, y_0), а это значит, что точка (x_0, y_0) входит в множество Мазуркевича той конституанты, к которой она принадлежит. Таким образом $M \subset M'$. Сопоставляя с предыдущим, имеем $M=M'$.

Ч. Т. Д.

Пусть теперь K есть плоское A_2'-множество, и $\mathcal{E}$ униформное CA-множество, в него проектирующееся. Вместе с П. С. Новиковым мы назовем проекции конституант множества $\mathcal{E}$ конституантами множества K.

ЛЕММА II. *Сумма множеств Мазуркевича всех конституант плоского A_2'-множества есть также A_2'-множество.*

Доказательство. Пусть K есть плоское A_2'-множество, $\mathcal{E}$—униформное CA-множество, в него проектирующееся ($K \subset OXY$; $\mathcal{E} \subset OXYZ$). Рассмотрим в пространстве $OXYZT$ множество E точек (x, y, z, t) таких, что $(x, y, z) \subset \mathcal{E}$ и $t \geqslant y$. Повторив доказательство предыдущей леммы, мы увидим, что множество всех точек $(x_0, y_0, z_0) \subset \subset \mathcal{E}$, имеющих то свойство, что среди точек $(x_0, y_1, z_1) \subset \mathcal{E}$, где $y_1 < y_0$, нет ни одной, в которой индекс решета C, определяющего $\mathcal{E}$, равен его индексу в точке (x_0, y_0, z_0), есть CA-множество ([3]). Проекция этого множества на плоскость OXY совпадает с суммой множеств Мазуркевича всех конституант множества E.

Это доказывает, что упомянутая сумма есть A_2'-множество.

С помощью этих лемм мы докажем нижеследующие теоремы, касающиеся строения некоторых CA- и A_2'-множеств, а также вопроса о соотношении классов A_2- и A_2'-множеств.

ТЕОРЕМА I. *Если в эвклидовом пространстве существует CA-множество, имеющее несчетное множество замкнутых конституант, то существует и несчетное CA-множество без совершенного ядра.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}$ есть линейное CA-множество, имеющее указанное свойство. Множеством Мазуркевича его конституанты является тогда нижний конец ее, в том случае, когда он ей принадлежит. В противном случае множество Мазуркевича пусто. Однако всякое замкнутое множество содержит свой нижний конец. Следовательно, сумма M всех нижних концов конституант есть несчетное множество. Так как множество M имеет не больше чем по одной точке в каждой из конституант $\mathcal{E}_\alpha$, оно не может содержать совершенного ядра, так как таковое было бы включено в счетное число множеств $\mathcal{E}_\alpha$, что невозможно.

На основании леммы I M есть CA-множество. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА II. *Если в эвклидовом пространстве существует A_2'-множество, имеющее несчетное число замкнутых конституант, то существует и несчетное CA-множество без совершенного ядра.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}$ есть линейное A_2'-множество, удовлетворяющее условиям теоремы. Пусть H есть униформное CA-множество, проектирующееся в $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E} \subset OX$; $H \subset OXY$). Обозначив через M множество нижних концов конституант множества $\mathcal{E}$ и применив лемму II, так же как в теореме I, убедимся в том, что M есть несчетное A_2'-множество и что в каждой конституанте множества E оно имеет не больше чем по одной точке. Пусть теперь N есть униформное CA-множество, проектирующееся в M ($N \subset OXZ$). Обозначим через G множество всех точек пространства $OXYZ$, проектирующихся на плоскость OXY в множество H. Это есть CA-множество. Зададим его решетом, у которого индексы вдоль параллелей к оси OZ постоянны. Пусть теперь P есть множество всех точек пространства $OXYZ$, проектирующихся на плоскость OXZ в N. P есть также CA-множество. Обозначим

$$Q = PG.$$

Проекция Q на OX есть M.

Но множество M, как уже было отмечено, во всякой конституанте множества $\mathcal{E}$ имеет не больше одной точки. Конституанты множества G проектируются в конституанты того же номера множества $\mathcal{E}$. Из этого вытекает, что множество Q имеет не больше одной точки во всякой конституанте множества G; следовательно, Q лишено совершенного ядра, но оно является несчетным CA-множеством. Это доказывает теорему.

Доказанные теоремы показывают, что бессмысленно ставить вопрос о природе проекции CA- и A_2'-множеств, имеющих несчетное число замкнутых конституант, так как из их существования следует существование CA-множества без совершенного ядра, а это влечет за собой,

как показал П. С. Новиков, совпадение классов A_2 и A_2'. Однако вопрос о природе простейшего униформизирующего множества этим еще не снимается. Он решается в следующих двух теоремах.

ТЕОРЕМА III. *Плоское CA-множество, все конституанты которого замкнуты, униформизируется посредством CA-множества.*

ТЕОРЕМА IV. *Плоское A_2'-множество, все конституанты которого замкнуты, униформизируется посредством A_2'-множества.*

Кроме того, уже вне связи с редукциями проблемы о совершенном ядре, мы имеем следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА V. *Плоское CA-множество, пересекающееся всякой параллелью к оси OY по замкнутому множеству, униформизируется CA-множеством и проектируется в A_2'-множество.*

ТЕОРЕМА VI. *Плоское A_2'-множество, пересекающееся всякой параллелью к оси OY по замкнутому множеству, униформизируется A_2'-множеством и проектируется в A_2'-множество.*

Доказательство теорем III—VI. В случае всех этих теорем множество M, определенное в леммах I и II, имеет ту же проекцию на ось OX, что и исходное множество, удовлетворяющее условиям теоремы. Однако M есть CA- или A_2'-множество, не имеющее ни на одной прямой $x = \text{const}$ совершенного ядра. Как показал П. С. Новиков (²), такие множества униформизируются CA- или A_2'-множествами. Следовательно, их проекция на ось есть A_2'-множество.

Естественно возникает вопрос о том, можно ли в теоремах I—VI заменить замкнутые множества множествами ограниченного класса, хотя бы F_σ. Из результатов П. С. Новикова (²) следует, что если в теореме V удастся заменить множества F на B-множества, то это решит до конца вопрос о взаимоотношении классов A_2- и A_2'-множеств.

Отметим еще, что всякое CA- или A_2'-множество, имеющее на всякой параллели к оси OY самую нижнюю точку, униформизируется множеством той же природы.

§ 2

Мы рассмотрели униформизацию плоских CA-множеств, пересекающихся параллелями к оси OY по множествам замкнутым. Случай, когда CA-множество пересекается по произвольным B-множествам, был рассмотрен П. С. Новиковым (²). Оказалось, что он эквивалентен самому общему случаю. Относительно природы униформизирующего множества в этом последнем случае удалось установить лишь то, что оно является CA_2-множеством (⁵).

Промежуточный случай, т. е. случай пересечения по множествам ограниченного класса (хотя бы F_σ), до сих пор изучению не поддается.

Внимательное рассмотрение всех оценок природы униформизирующего множества показывает, что характер оценки зависит прежде всего от характера приема, применяемого для того, чтобы, отправляясь от способа задания плоского CA-множества, получить на произвольной прямой $x = \text{const}$, пересекающей данное множество, единственную точку;

входящую в это множество. Когда этот прием самый общий ([6]), униформизирующее множество оказывается CA_2, в тех же случаях, когда он более простой, нередко удается показать, что и униформизирующее множество имеет более простую природу.

Мы имеем в виду выделить ряд случаев, в которых плоское A_2'-множество пересекается всякой параллелью к оси OY по B- или даже A-множеству, но униформизируется множеством A_2'. Это удается тогда, когда указать точку, отправляясь от (A)-операции, возможно одновременно для всех прямых $x = \text{const}$, пересекающих данное множество. Разумеется, все эти (A)-операции должны быть известным образом объединены между собой.

ТЕОРЕМА VII. *Пусть* $\{E_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ *есть система плоских* A_2'-*множеств, пересекающихся всякой параллелью к оси* OY *по множеству замкнутому.*

Тогда результат (A)-*операции*

$$E = \sum_{n_1 n_2 \ldots n_k} \prod_k E_{n_1 n_2 \ldots n_k}$$

есть A_2'-*множество, униформизируемое посредством* A_2'-*множества.*

То обстоятельство, что E есть A_2'-множество, следует из того, что семейство A_2'-множеств инвариантно относительно (A)-операции ([3]).

Доказательство. Пусть все $E_{n_1 n_2 \ldots n_k} \subset OXY$. Мы можем считать, что $E_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset E_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}}$, если их кортежи продолжают друга друга.

$$\mathcal{E}_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \Pi_x \, E_{n_1 n_2 \ldots n_k}.$$

Рассмотрим на оси OZ систему интервалов

$$\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k},$$

имеющих следующие свойства:

1) при постоянном k интервалы $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ попарно не имеют общих точек и образуют вполне упорядоченную систему;

2) $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset \delta_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}}$, если номера n_i, стоящие на первых k местах, одни и те же;

3) никакие два интервала не имеют общего конца.

Такие системы всегда рассматриваются при построении элементарных решет.

Образуем теперь две системы элементарных гребенок с помощью декартовых произведений:

$$C_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \mathcal{E}_{n_1 n_2 \ldots n_k} \times \delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$$

и

$$D_{n_1 n_2 \ldots n_k} = E_{n_1 n_2 \ldots n_k} \times \delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}.$$

Пусть далее

$$C^k = \sum_{n_1 n_2 \ldots n_k} C_{n_1 n_2 \ldots n_k}$$

и

$$D^k = \sum_{n_1 n_2 \ldots n_k} D_{n_1 n_2 \ldots n_k}.$$

Совокупности гребенок $C_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ и $D_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ образуют некоторые элементарные решета.

Обозначим через $C = \prod_k C^k$ и $D = \prod_k D^k$ ядра этих решет.

Совершенно очевидно, что D есть A_2'-множество. Из того что все $E_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ пересекаются с параллелями к OY по замкнутым множествам, следует, что все $\mathcal{E}_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ суть также A_2'-множества (см. теорему V). Следовательно, это имеет место также и для C.

В силу свойств системы интервалов $\{\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ множество C имеет на всякой параллели к оси OZ самую нижнюю точку. Следовательно, его можно униформизировать посредством A_2'-множества. Пусть H есть это униформизирующее множество. Ясно, что проекция множества D на плоскость OXZ есть множество C. Это следует из того, что пересечение вложенных друг в друга замкнутых множеств не пусто.

Обозначим через G множество всех точек множества D, проекции которых на плоскость OXZ принадлежат H; G есть A_2'-множество, униформное относительно оси OZ. Более того, во всякой плоскости $x = x_0$ множество G имеет точки не более чем на одной прямой, параллельной оси OY. Именно на той, которая проходит через точку множества H, лежащую на прямой $x = x_0$, если таковая существует.

Обозначим через K проекцию множества G на плоскость OXY. Множество K есть также A_2'-множество. Оно пересекается всякой прямой $x = x_0$ по множеству, тождественному с множеством, по которому пересекает множество G перпендикуляр к плоскости $y = 0$, проходящий через точку множества H, лежащую в плоскости $x = x_0$.

Теперь мы покажем, что множество K пересекается всякой параллелью к оси OY по множеству замкнутому. Для этого достаточно показать, что это же свойство имеет множество G.

Действительно, пусть $(x_0, z_0) \subset H$. Тогда прямая $x = x_0$, $z = z_0$ пересекает множество G. Однако это пересечение совпадает с общей частью той же прямой и множества D. Так как $H \subset C$, существует такая система вложенных друг в друга множеств

$$C_{n_1},\ C_{n_1 n_2},\ \ldots,\ C_{n_1 n_2 \ldots n_k},\ \ldots,$$

что каждое из них, а следовательно, и их пересечение содержит точку (x_0, y_0).

Тогда соответствующая система множеств

$$D_{n_1},\ D_{n_1 n_2},\ \ldots,\ D_{n_1 n_2 \ldots n_k},\ \ldots$$

содержит пересечение множества D с прямой $x = x_0$, $z = z_0$. Однако всякое множество $D_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ со всякой прямой, параллельной оси OY, пересекается по замкнутому множеству, потому что то же свойство имеет всякое множество $E_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Поэтому пересечение множества

$$D_{n_1} \cdot D_{n_1 n_2} \cdot D_{n_1 n_2 n_3} \cdot \ldots \cdot D_{n_1 n_2 \ldots n_k} \ldots$$

с прямой $x = x_0$, $z = z_0$ также есть не пустое замкнутое множество. Следовательно, и множество K со всякой параллелью к оси OY пересекается

по не пустому замкнутому множеству, а это последнее можно униформизировать A_2'-множеством. Обозначим его через L.

Покажем теперь, что проекция множества L на ось OX совпадает с проекцией на ось OX множества E. Действительно, во всякой плоскости $x = \text{const}$, где есть точки множества E, найдутся и точки множеств C и D. Таким же образом в этой плоскости найдутся точки множеств H и G, следовательно, и множества K. Но тогда в этой плоскости найдутся и точки множества L, так как L униформизирует K. Таким образом действительно L есть A_2'-множество, униформизирующее множество E.

ч. т. д.

Отметим, что если вместо (A)-операции фигурируют суммы и пересечения в конечном или счетном числе, то имеет место следующее: в случае операций $\prod\limits_n$, $\sum\limits_n$ и $\sum\limits_n\prod\limits_k$ можно получить униформизирующее множество непосредственно. Однако уже в случае операции $\prod\limits_n\sum\limits_k$ существенного упрощения по сравнению с (A)-операцией не видно.

Если все $E_{n_1n_2\ldots n_k}$ суть CA-множества, то при операциях $\prod\limits_n$, $\sum\limits_n$ и $\sum\limits_n\prod\limits_k$ множество E удается униформизировать посредством CA-множеств. В остальных же случаях—только посредством A_2'-множеств.

В виду того что семейство плоских A_2'-множеств, пересекающихся параллелями к оси OY по замкнутым, инвариантно относительно конечных пересечений, по теореме Селивановского ([7]) повторное применение (A)-операции к этому семейству дает то же самое, что и однократное. В частности, все множества, которые можно получить конечным или счетным числом (B)-операций, исходя из указанных A_2'-множеств, можно получить и однократным применением к ним (A)-операции.

В качестве приложения этой теоремы мы дадим одно новое распространение новиковского принципа отражения ([8, 4]).

Куратовский ([9]) показал, что если C_1 есть B-решето, а C_2 есть CA_n-решето, то, повторяя рассуждения, которыми доказывается принцип отражения, можно установить, что множество тех точек, в которых индекс решета C_1 больше или равен индексу решета C_2, есть множество типа A_n.

На случай, когда решето C_2 состоит из множеств типа CA_2', непосредственно оценка, сделанная Куратовским, не распространяется. Опираясь на предшествующую теорему, мы покажем, что *если C_1 есть B-решето (или даже B_2'-решето), а C_2 есть CA_2'-решето, то множество $W_{C_1C_2}$ точек, где индекс решета C_1 больше или равен индексу решета C_2, есть всегда A_2'-множество.* Мы будем исходить из способа доказательства принципа отражения, данного Н. Лузиным [([4]), стр. 209 и след.] и по существу совпадающего с первоначальным доказательством П. С. Новикова ([2]).

Напомним сперва основные этапы этой конструкции. Пусть

$$\varphi_{r_1}(x),\ \varphi_{r_2}(x),\ \ldots,\ \varphi_{r_n}(x),\ \ldots$$

есть счетная система принимающих лишь рациональные значения функций от иррационального числа, универсальная для всех преобразований подобия. Это означает, что каково бы ни было соответствие подобия

$$r_1 \longrightarrow r_{n_1},\ r_2 \longrightarrow r_{n_2},\ \ldots,\ r_k \longrightarrow r_{n_k},\ \ldots \quad (1 > r_n > 0),$$

всегда найдется такое иррациональное число x_0, что

$$\varphi_{r_1}(x_0) = r_{n_1},\ \varphi_{r_2}(x_0) = r_{n_2},\ \ldots,\ \varphi_{r_k}(x_0) = r_{n_k},\ \ldots$$

и, кроме того, для всякого иррационального числа x совокупность значений $\varphi_{r_1}(x_1), \ldots, \varphi_{r_n}(x), \ldots$ подобна множеству $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, если установить соответствие так:

$$r_1 \longrightarrow \varphi_{r_1}(x),\ r_2 \longrightarrow \varphi_{r_2}(x),\ \ldots,\ r_k \longrightarrow \varphi_{r_k}(x),\ \ldots$$

Система таких функций была построена Н. Н. Лузиным.

В виду того что наша теорема об униформизации доказана только для случая, когда все сечения рассматриваемых множеств параллелями к оси OY суть множества, замкнутые на эвклидовой прямой, нам придется построить систему функций

$$\psi_{r_1}(x),\ \ldots,\ \psi_{r_n}(x),\ \ldots,$$

имеющих отмеченные выше свойства и определенных для всякого действительного числа x. Эти функции, очевидно, не могут уже быть непрерывными. Однако они будут непрерывны справа.

Построим на оси абсцисс систему полуинтервалов

$$\left\{\sigma_{n_1 n_2 \ldots n_k}\right\},$$

имеющих следующие свойства:

1) при $k = \text{const}$ полуинтервалы $\sigma_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ покрывают всю ось абсцисс и попарно не пересекаются;

2) $\sigma_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset \sigma_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}}$, если кортеж второго продолжает кортеж первого;

3) максимум длин полуинтервалов $\sigma_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ при $k = \text{const}$ стремится к нулю вместе с $\frac{1}{k}$;

4) при $k = \text{const}$ полуинтервалы $\sigma_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ образуют систему, вполне упорядоченную вправо;

5) каждый полуинтервал содержит свой левый конец и не содержит своего правого конца.

Существование таких систем очевидно.

Функцию $\psi_{r_k}(x)$ мы будем строить при помощи полуинтервалов ранга k.

Пусть $\psi_{r_1}(x) = r_m$, если $x \subset \sigma_m$. Предположим теперь, что все функции $\psi_{r_i}(x)$ уже построены, если $i < k$; пусть функция $\psi_{r_i}(x)$ постоянна на всяком полуинтервале $\sigma_{n_1 n_2 \ldots n_i}$ ранга i.

Построим теперь функцию $\psi_{r_k}(x)$ следующим образом. Пусть r_i и r_j ближайшие сверху и снизу к r_k рациональные числа, такие, что

$i<k$ и $j<k$. Если одного из них не существует, то мы заменим его соответственно нулем или единицей.

Положим

$$\psi_{r_k}(x)=\rho_{n_1n_2\ldots n_{k-1}p}, \text{ если } x\subset\sigma_{n_1n_2\ldots n_{k-1}p},$$

где $\rho_{n_1n_2\ldots n_{k-1}p}$ пробегает при переменном ρ и постоянных других индексах все рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\psi_{r_i}(x)>\rho_{n_1n_2\ldots n_{k-1}p}\supset\psi_{r_j}(x),$$

когда $x\subset\sigma$.

Можно показать, что функции $\psi_{r_n}(x)$ имеют все требуемые свойства.

Исходя из функций $\{\psi_{r_n}(x)\}$, можно оценивать тип множества $W_{C_1C_2}$ таким же образом, как это сделано в книге Н. Н. Лузина.

Поместим теперь решета C_1 и C_2 в плоскости $y=0$ и $y=1$ так, чтобы определенные этими решетами множества лежали на прямых $z=0$, проведенных в этих плоскостях. Пусть прямая $x=x_0$, $y=0$ пересекает решето C_1 в точках $r_{n_1}, r_{n_2}, \ldots, r_{n_k}, \ldots$

Мы поместим в плоскости $x=x_0$ кривые

$$z=\psi_{r_{n_1}}(y), \quad z=\psi_{r_{n_2}}(y), \ldots, \quad z=\psi_{r_{n_k}}(y), \ldots$$

Обозначим через M пространственное множество, образованное всеми такими кривыми, когда точка x пробегает всю ось OX. Как и в случае Н. Н. Лузина, M есть B-множество или B_2'-множество, если таково C_1. Обозначим далее через N множество точек пространства $OXYZ$, проектирующихся на плоскость $y=1$ в точки решета C_2. Очевидно, N есть CA_2-множество. Множество $W_{C_1C_2}$ получается следующим способом:

$$W_{C_1C_2}=\Pi_x\{C\Pi_{xy}[N-M]\}.$$

Делая элементарную оценку, можно убедиться в том, что $W_{C_1C_2}$ есть A_2-множество. Однако, опираясь на доказанную выше теорему, мы покажем, что $W_{C_1C_2}$ есть A_2'-множество. Обозначим для этого через N_{r_n} множество тех точек $(x, y, z)\subset N$, для которых $z=z_n$, и через M_{r_n} множество тех точек множества M, которые произошли от кривой $\psi_{r_n}(y)$.

Очевидно, M_{r_n} есть CA_2'-множество, а N_{r_n} B- или B_2'-множество.

Мы имеем

$$CE=\Pi_{xy}[N-M]=\sum_n\prod_k\{\Pi_{xy}[N_{r_n}-M_{r_k}]\}.$$

Из способа построения функций ψ_{r_n} немедленно следует, что как множество $M_{r_n}\cdot N_{r_k}$, так и множество $N_{r_k}-M_{r_n}$ пересекаются всякой па-

раллелью к оси OY по множеству, состоящему из счетного числа полуинтервалов $\sigma_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ ограниченного ранга.

Обозначим еще

$$CE_{nk} = \Pi_{xy}[N_{r_n} - M_{r_k}].$$

Очевидно, имеем

$$E = \prod_n \sum_k E_{nk}.$$

Как множества E_{nk}, так и множество E суть A_2'-множества.

Так как всякий полуинтервал без левого конца есть сумма счетного числа замкнутых сегментов, то каждое множество E_{nk} можно представить как сумму счетного числа слагаемых типа A_2', из которых каждое пересекается всякой параллелью к оси OY по замкнутому сегменту. Множество E строится, исходя из этих слагаемых, при помощи операций суммирования и пересечения. Поэтому E можно построить и (A)-операцией над множествами A_2', пересекающимися параллелями к оси OY по множествам замкнутым. По доказанной теореме множество E униформизируется посредством A_2'-множества. Но тогда

$$W_{C_1 C_2} = \Pi_x E$$

есть также A_2'-множество.

Примечание. Как цитированный выше результат Куратовского, так и изложенное распространение его на случай CA_2'-решет могут быть легко получены при помощи того нового метода, которым П. С. Новиков доказал принцип отражения ([10]).

Отметим еще, что условиям теоремы VII удовлетворяют все множества, являющиеся общей частью плоского A-множества и плоского A_2'-множества, пересекающегося со всякой параллелью к оси OY по множествам замкнутым. Поэтому все такие множества униформизируются посредством A_2'-множеств. (Примечание внесено при просмотре корректуры.)

Поступило
1. XII. 1938.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Novikoff P., Les projections des complémentaires analytiques uniformes. Мат. сб. 2 (44) : 1, 1937.

[2] Новиков П. С., О взаимоотношении второго класса проективных множеств и проекций униформных аналитических дополнений, Изв. АН СССР, Сер. мат., № 2, 1937.

[3] Ляпунов А. А., О некоторых униформных аналитических дополнениях, Изв. АН СССР, Сер. мат., № 2, 1937.

[4] Lusin N., Leçons sur les ensembles analytiques, Paris 1930.

[5] Ляпунов А. А., Униформизация плоских CA-множеств, Мат. сб., 3 (45): 1, 1938.

[6] Lusin N. et Novikoff P., Choix effectif d'un point dans un complémentaire analytique, Fund. Math., XXV, 1935.

[7] Селивановский Е., Об одном классе эффективных множеств, Мат. сб. 35: 3—4, 1928.

[8] Novikoff P., Sur les fonctions implicites mesurables, Fund. Math., XVII, 1931.

[9] Kuratowski C., Sur l'operation (A) et les ensembles projectifs, C. R. 203, 1936, 9 nov.

[10] Новиков П. С., Отделимость C-множеств, Изв. АН СССР, Серия математ., 1937, № 2.

A. LIAPOUNOFF. SUR L'UNIFORMISATION DE QUELQUES ENSEMBLES CA et A'_2

RÉSUMÉ

En employant la méthode d'un article récent ([3]), nous établissons dans le § 1 les deux lemmes suivants:

Lemmes 1 et 2. *La réunion des ensembles de Mazurkiewicz de toutes les constituantes d'un ensemble CA (ou A'_2) est de même un ensemble CA (ou A'_2).*

Nous démontrons ensuite les théorèmes suivants qui ont été mentionnés dans notre article cité.

Théorèmes 1 et 2. *L'existence d'un ensemble CA (ou A'_2) ayant un système non denombrable de constituantes fermées entraîne l'existence d'un complémentaire analytique qui ne contient aucun ensemble parfait.*

Théorèmes 3 et 4. *Tout ensemble plan CA (ou A'_2) dont toutes les constituantes sont fermées, peut être toujours uniformisé au moyen d'un ensemble CA (ou A'_2).*

Théorèmes 5 et 6. *Tout ensemble plan CA (ou A'_2) qui est coupe par chaque droite $x = \text{const}$ suivant un ensemble fermé ou vide, peut être toujours uniformisé au moyen d'un ensemble CA (ou A'_2).*

Il est aisé de voir que si l'on pouvait remplacer les ensembles fermés par des ensembles mesurables B arbitraires dans l'un de ces théorèmes, on aurait obtenu la solution du problème de P. Novikoff sur le rapport mutuel des ensembles A_2 et A'_2 ([2]).

Mais nous ne savons même pas, si l'on peut remplacer dans ces théorèmes les ensembles fermés par des ensembles de classes bornées (en particulier F_σ).

D'ailleurs nous démontrons dans le § 2 qu'il y a des cas où l'on peut uniformiser un ensemble A'_2 au moyen d'un ensemble de même nature quand les théorèmes précédents ne sont pas appliquables.

Ainsi nous prouvons le

Théorème 7. *Soit $\{E_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ un système d'ensembles A'_2 tels que toute parallèle à l'axe OY coupe chacun d'eux suivant un ensemble fermé ou vide. Soit*

$$E = \sum_{n_1 n_2 \dots n_k \dots} \prod_k E_{n_1 n_2 \dots n_k}.$$

Alors l'ensemble E peut toujours être uniformisé au moyen d'un ensemble A'_2.

En nous appuyant sur ce théorème nous obtenons une proposition analogue au principe de la comparaison des cribles établi par P. Novikoff.

Soit C_1 un crible mesurable B (ou même B_2') et C_2 un crible CA_2'. Alors l'ensemble des points, où l'indice de C_1 est supérieur ou égal à l'indice de C_2, est un ensemble A_2'.

Pour le cas des ensembles CA_n cette proposition a été obtenue par C. Kuratowski (9).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

М. А. НАЙМАРК

О ПРЯМОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ ЗАМКНУТЫХ ОПЕРАТОРОВ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье вводится понятие прямого произведения линейных замкнутых операторов, имеющих плотные области определения, и исследуются свойства такого произведения. Полученные результаты можно применить к линейным дифференциальным операторам в частных производных.

Пусть $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — два гильбертовых пространства (1). Согласно терминологии F. J. Murray и J. v. Neumann'a (2), прямое произведение $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ этих пространств определяется следующим образом:

Прямым произведением $f_0 \times g_0$ элементов $f_0 \in \mathfrak{H}_1$, $g_0 \in \mathfrak{H}_2$ называется функционал

$$\Phi = (f_0, f)(g_0, g), \tag{I}$$

где $f \in \mathfrak{H}_1$, $g \in \mathfrak{H}_2$.

Скалярным произведением (Φ, Φ') двух линейных комбинаций

$$\Phi = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k (f_k \times g_k), \qquad \Phi' = \sum_{j=1}^{r'} \alpha'_j (f'_j \times g'_j) \tag{II}$$

таких функционалов называется выражение

$$(\Phi, \Phi') = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{r'} \alpha_k \overline{\alpha'_j} (f_k, f'_j)(g_k, g'_j). \tag{III}$$

Легко показать, что (Φ, Φ') обладает всеми свойствами скалярного произведения и зависит не от представления (II) элементов Φ и Φ', а только от самих Φ и Φ'. Топологическое дополнение совокупности $\mathfrak{H}'$ всех линейных комбинаций типа (II) по скалярному произведению (Φ, Φ') образует гильбертово пространство, которое и называется прямым произведением $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ пространств $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$.

Если, например, $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ представляют собой совокупности функций $f(x)$, $g(y)$, суммируемых вместе со своим квадратом в $(0, 1)$, то $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ представляет собой совокупность всех функций $f(x, y)$, заданных в квадрате $[(0, 1); (0, 1)]$ и суммируемых вместе со своим квадратом в $[(0, 1); (0, 1)]$.

В настоящей работе вводится понятие прямого произведения $A_1 \times A_2$ линейных замкнутых операторов A_1, A_2 в $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ с областями определения, плотными в $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$, причем $A_1 \times A_2$ также оказывается линей-

ным замкнутым оператором в $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ с областью определения, плотной в $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$.

В § 1 проводится построение $A_1 \times A_2$; § 2 посвящен тому случаю, когда A_1 и A_2 — самосопряженные операторы. Именно, доказывается, что в этом случае $A_1 \times A_2$ также самосопряженный оператор, и дается формула для его спектрального разложения через спектральные разложения A_1 и A_2. В § 3 выводится связь между каноническими представлениями [3] $A_1 = W_1 H_1$, $A_2 = W_2 H_2$ операторов A_1, A_2 и каноническим представлением $A_1 \times A_2 = WH$ оператора $A_1 \times A_2$. Оказывается, что $W = W_1 \times W_2$, $H = H_1 \times H_2$; отсюда выводится ряд следствий относительно сопряженного оператора $(A_1 \times A_2)^*$. Наконец, § 4 посвящен вычислению индекса дефекта $A_1 \times A_2$ в случае, если A_1 и A_2 — симметрические операторы. Если, например, $A_1 = i\frac{d}{dx}$, $A_2 = i\frac{d}{dy}$, а $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ — совокупности функций $f(x)$, $g(y)$, суммируемых со своим квадратом в $(0, 1)$, то $A_1 \times A_2$ совпадает с замыканием оператора $-\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}$, соответствующим образом определенного на некотором линейном многообразии, плотном в $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$. Таким образом, получается ряд результатов относительно оператора $-\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}$. Совершенно аналогично можно получить ряд результатов о дифференциальных операторах в частных производных, пользуясь известными свойствами обыкновенных дифференциальных операторов.

В заключение отмечу, что полученные результаты легко обобщаются на случай прямого произведения большего числа пространств и операторов. Два пространства рассмотрены здесь только ради простоты изложения.

§ 1. Построение прямого произведения

О п р е д е л е н и е 1. Линейный замкнутый оператор A с областью определения, плотной в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, будем называть N-о п е р а т о р о м в $\mathfrak{H}$.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть A_1 и A_2 суть N-операторы в $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$, а $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ — их области определения. Обозначим через L' всевозможные линейные комбинации

$$\Phi' = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k (f_k \times g_k), \quad f_k \in L_1, \quad g_k \in L_2 \tag{1}$$

и определим новый оператор A' на L' равенством

$$A'\Phi' = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k (A_1 f_k \times A_2 g_k). \tag{2}$$

ТЕОРЕМА 1. *$A'\Phi'$ не зависит от представления* (1) *элемента Φ', а только от самого Φ'. Оператор A' допускает замыкание $\tilde{A}'$, и $\tilde{A}'$ есть N-оператор в $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$.*

Доказательство. В силу линейности (2), чтобы установить однозначность $A'\Phi'$, достаточно доказать, что из $\Phi' = 0$ следует $A'\Phi' = 0$. Но если

$$\Phi' = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k (f_k \times g_k) = 0,$$

то для $f \in L_1^*$, $g \in L_2^*$ (области определения A_1^*, A_2^*)

$$(A'\Phi', f \times g) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k (A_1 f_k, f)(A_2 g_k, g) =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \alpha_k (f_k, A_1^* f)(g_k, A_2^* g) = (\Phi', A_1^* f \times A_2^* g) = 0.$$

Так как L_1^*, L_2^* плотны в $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ (см. J. v. Neumann [2]) и $(A'\Phi', f \times g)$ непрерывно относительно f и g, то $(A'\Phi', f \times g) = 0$ для произвольных $f \in \mathfrak{H}_1$, $g \in \mathfrak{H}_2$, т. е. $A'\Phi' = 0$.

Чтобы доказать существование замыкания $\tilde{A}'$, достаточно доказать, что из

$$\left.\begin{array}{l} |\Phi_n'| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty, \quad \Phi_n' \in L', \\ |A'\Phi_n' - A'\Phi_m'| \to 0 \quad \text{при } n, m \to \infty \end{array}\right\} \qquad (3)$$

следует

$$|A'\Phi_n'| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty. \qquad (4)$$

Итак, пусть (3) выполняется; положим

$$\Phi_n' = \sum_{k=1}^{r_n} \alpha_k^n (f_k^n \times g_k^n), \quad \lim_{n \to \infty} A'\Phi_n' = \Psi.$$

Тогда для $f \in L_1^*$, $g \in L_2^*$

$$(A'\Phi_n', f \times g) = \sum_{k=1}^{r_n} \alpha_k^n (A_1 f_k^n, f)(A_2 g_k^n, g) =$$

$$= \sum_{k=1}^{r_n} \alpha_k^n (f_k^n, A_1^* f)(g_k^n, A_2^* g) = (\Phi_n', A_1^* f \times A_2^* g);$$

следовательно, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$(\Psi, f \times g) = 0$$

для $f \in L_1^*$, $g \in L_2^*$, а следовательно для всех $f \in \mathfrak{H}_1$, $g \in \mathfrak{H}_2$. Поэтому $\Psi = 0$, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} |A'\Phi_n'| = 0$.

Остается доказать, что область определения $\tilde{L}'$ оператора $\tilde{A}'$ плотна в $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$. Для этого достаточно доказать, что $L' (\subset \tilde{L}')$ плотно в $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$. Но так как L_1 плотно в $\mathfrak{H}_1$, L_2 плотно в $\mathfrak{H}_2$, то L' плотно в совокупности $\mathfrak{H}'$ всех линейных комбинаций

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_k (f_k \times g_k), \quad f_k \in \mathfrak{H}_1, \quad g_k \in \mathfrak{H}_2,$$

а последняя плотна в $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$. Следовательно, L' плотно в $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$, и теорема полностью доказана.

Определение 3. Оператор $\tilde{A}'$ будем называть **прямым произведением** операторов A_1 и A_2 и обозначать через $A_1 \times A_2$. Введем еще обозначение

$$A_1^{(1)} = A_1 \times 1, \quad A_2^{(2)} = 1 \times A_2, \tag{5}$$

где 1 — единичный оператор в $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ соответственно.

ТЕОРЕМА 2. *Если A_1, A_2 — ограниченные операторы в $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, то $A_1 \times A_2$, $A_1^{(1)}$, $A_2^{(2)}$ — ограниченные операторы в $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ и*

$$A_1 \times A_2 = A_1^{(1)} A_2^{(2)} = A_2^{(2)} A_1^{(1)}. \tag{6}$$

Доказательство. Докажем сперва, что $A_1^{(1)}$, $A_2^{(2)}$ ограничены. Для этого обозначим через ${}^{(1)}A_1$, ${}^{(2)}A_2$ ограниченные операторы, построенные F. J. Murray и J. v. Neumann'ом (2) по ограниченным операторам A_1, A_2 (у F. J. Murray и J. v. Neumann'a они обозначены через $A_1^{(1)}$, $A_2^{(2)}$).

Эти операторы удовлетворяют условиям

$${}^{(1)}A_1 (f \times g) = (A_1 f) \times g, \quad {}^{(2)}A_2 (f \times g) = f \times (A_2 g);$$

но так как тем же условиям удовлетворяют $A_1^{(1)}$, $A_2^{(2)}$, то

$$A_1^{(1)} (f \times g) = {}^{(1)}A_1 (f \times g), \quad A_2^{(2)} (f \times g) = {}^{(2)}A_2 (f \times g).$$

В силу линейности отсюда заключаем, что

$$A_1^{(1)} = {}^{(1)}A_1, \quad A_2^{(2)} = {}^{(2)}A_2 \quad \text{на } \mathfrak{H}', \tag{7}$$

т. е. $A_1^{(1)}$, $A_2^{(2)}$ ограничены в $\mathfrak{H}'$, а значит, в силу их замкнутости они ограничены, их областью определения является $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ и равенства (7) имеют место в $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$.

Далее

$$(A_1 \times A_2)(f \times g) = A_1 f \times A_2 g = A_1^{(1)} A_2^{(2)} (f \times g);$$

в силу линейности отсюда следует

$$A_1 \times A_2 = A_1^{(1)} A_2^{(2)} \quad \text{на } \mathfrak{H}'.$$

Но так как правая часть — ограниченный оператор, а левая — замкнутый, то (8) имеет место во всем $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ и $A_1 \times A_2$ — ограниченный оператор.

Из приведенного доказательства следует, что в случае ограниченных A_1, A_2 построенные нами операторы $A_1^{(1)}$, $A_2^{(2)}$ совпадают с операторами $A_1^{(1)}$, $A_2^{(2}$, построенными F. J. Murray и J. v. Neumann'ом (2). Поэтому, в случае ограниченных A_1, A_2, мы можем использовать все результаты F. J. Murray и J. v. Neumann'a, относящиеся к таким $A_1^{(1)}$, $A_2^{(2)}$.

§ 2. Прямое произведение самосопряженных операторов

ТЕОРЕМА 3. *Если H_1, H_2 — самосопряженные операторы в $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, то $H_1 \times H_2$ — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$. Если $E_1(\lambda)$, $E_2(\mu)$ —*

спектральные разложения H_1, H_2 *и* $E(\lambda, \mu) = E_1(\lambda) \times E_2(\mu)$, *то* $(H_1 \times H_2)\Phi$ *имеет смысл для тех и только тех* $\Phi \in \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$, *для которых сходится*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda\mu|^2 d\,|E(\lambda, \mu)\Phi|^2, \tag{1}$$

причем

$$(H_1 \times H_2)\Phi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\mu\, dE(\lambda, \mu)\Phi. \tag{2}$$

Спектральное разложение $F(\nu)$ *оператора* $H_1 \times H_2$ *вычисляется по формуле*

$$F(\nu) = \int_{\lambda\mu<\nu} dE(\lambda, \mu). \tag{3}$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что $E(\lambda, \mu)$ — проекционный оператор и что при $\lambda'' = \min(\lambda, \lambda')$, $\mu'' = \min(\mu, \mu')$

$$E(\lambda, \mu) \cdot E(\lambda', \mu') = E(\lambda'', \mu''). \tag{4}$$

В самом деле,

$$E(\lambda, \mu) = E_1^{(1)}(\lambda) \cdot E_2^{(2)}(\mu),$$

а так как $E_1^{(1)}(\lambda)$, $E_2^{(2)}(\mu)$—перестановочные спектральные разложения (см. теорему 2 и конец § 1), то $E(\lambda, \mu)$—проекционный оператор, и (4) следует из $E_1^{(1)}(\lambda) \cdot E_1^{(1)}(\lambda') = E_1^{(1)}(\lambda'')$, $E_2^{(2)}(\mu) \cdot E_2^{(2)}(\mu') = E_2^{(2)}(\mu'')$. Из (4) следует, что для двух прямоугольников

$$\Delta = (\Delta_1, \Delta_2),\ \Delta' = (\Delta_1', \Delta_2') \quad (\Delta_1, \dots, \Delta_2' \text{— интервалы})$$

без общих точек

$$E(\Delta)\Phi = E_1^{(1)}(\Delta_1) \cdot E_2^{(2)}(\Delta_2)\Phi \quad \text{и} \quad E(\Delta')\Phi = E_1^{(1)}(\Delta_1') \cdot E_2^{(2)}(\Delta_2')\Phi$$

взаимно ортогональны (ибо либо $E_1^{(1)}(\Delta_1) \cdot E_1^{(1)}(\Delta_1') = 0$, либо $E_2^{(2)}(\Delta) \cdot E_2^{(2)}(\Delta') = 0$); поэтому $|E(\Delta)\Phi|^2$ — аддитивная функция Δ и из сходимости (1) следует сходимость правой части (2) в смысле нормы элемента.

Пусть теперь H' — оператор, определенный в L' и построенный так же, как A' был построен по A_1 и A_2 в определении 2, так что $\tilde{H}' = H_1 \times H_2$. Обозначим через H_0 оператор в $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$, определенный следующим образом: $H_0\Phi$ имеет смысл тогда и только тогда, когда (1) сходится, причем

$$H_0\Phi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\mu\, dE(\lambda, \mu)\Phi. \tag{5}$$

Легко видеть, что H_0 — симметрический оператор. В самом деле, пусть

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta_k = (-N, N), \quad \sum_{j=1}^{m} \Delta_j' = (-N', N'), \quad \lambda_k \in \Delta_k, \quad \mu_j \in \Delta'_j,$$
$$\delta = \max|\Delta_k|,$$
$$\delta' = \max|\Delta'_j|,$$

и пусть $\Phi, \Psi \in L_0$ (область определения H_0), так что для них правая часть (5) сходится. Тогда

$$(H_0\Phi, \Psi) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ N'\to\infty}} \lim_{\substack{\delta\to\infty \\ \delta'\to\infty}} \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_k \mu_j E(\triangle_k, \triangle_j') \Phi, \Psi \right) =$$

$$= \lim_{\substack{N\to\infty \\ N'\to\infty}} \lim_{\substack{\delta\to 0 \\ \delta'\to 0}} \left(\Phi, \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_k \mu_j E(\triangle_k, \triangle_j') \Psi \right) = (\Phi, H_0\Psi),$$

т. е. H_0 — симметрический оператор:

$$H_0^* \supset H_0. \tag{6}$$

Далее, $H' \subset H_0$. В самом деле, если $f \in L_1$, $g \in L_2$ (L_1, L_2 — области определения H_1, H_2), то

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 d |E_1(\lambda) f|^2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\mu|^2 d |E_2(\mu) g|^2$$

сходятся. Поэтому сходится также

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda\mu|^2 d |E(\lambda, \mu)(f \times g)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 d |E_1(\lambda) f|^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\mu|^2 d |E_2(\mu) g|^2,$$

так что $H_0(f \times g)$ имеет смысл и

$$H_0(f \times g) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\mu \, dE(\lambda, \mu)(f \times g) =$$

$$= \lim_{\substack{N\to\infty \\ N'\to\infty}} \lim_{\substack{\delta\to 0 \\ \delta'\to 0}} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_k \mu_j (E_1(\triangle_k) f \times E_2(\triangle_j) g) =$$

$$= \lim_{\substack{N\to\infty \\ N'\to\infty}} \lim_{\substack{\delta\to 0 \\ \delta'\to 0}} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_1(\triangle_k) f \times \sum_{j=1}^{m} \mu_j E_2(\triangle_j) g \right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_1(\lambda) f \times \int_{-\infty}^{\infty} \mu dE_2(\mu) g = H_1 f \times H_2 g = H'(f \times g).$$

В силу линейности отсюда следует:

$$H' = H_0 \quad \text{на} \quad L',$$

т. е.

$$H' \subset H_0. \tag{7}$$

Положим теперь, что $H'^* \Psi$ имеет смысл, т. е. для всех $\Phi \in L'$

$$(H' \Phi, \Psi) = (\Phi, H'^* \Psi).$$

Так как для $f \in \mathfrak{H}_1$, $g \in \mathfrak{H}_2$, $\triangle = (-N, N)$, $\triangle' = (-N', N')$,

$$E_1(\triangle) f \in L_1, \quad E_2(\triangle) g \in L_2,$$

то

$$\Phi = E_1(\triangle) f \times E_2(\triangle') g \in L',$$

следовательно,

$$(H'(E_1(\triangle) f \times E_2(\triangle') g), \Psi) = ((E_1(\triangle) f \times E_2(\triangle') g), H'^* \Psi),$$

или

$$(H_1E_1(\triangle)f \times H_2E_2(\triangle')g, \Psi) = (E(\triangle, \triangle')(f \times g), H'^*\Psi),$$

$$\left(\int_{-N}^{N}\int_{-N'}^{N'} \lambda\mu\, dE(\lambda, \mu)(f \times g), \Psi\right) = \left((f \times g), E(\triangle, \triangle')\, H'^*\Psi\right),$$

$$\left((f \times g), \int_{-N}^{N}\int_{-N'}^{N'} \lambda\mu\, dE(\lambda, \mu)\,\Psi\right) = \left((f \times g), E(\triangle, \triangle')\, H'^*\Psi\right). \qquad (8)$$

В силу произвольности f, g из (8) следует, что

$$\int_{-N}^{N}\int_{-N'}^{N'} \lambda\mu\, dE(\lambda, \mu)\,\Psi = E(\triangle, \triangle')\, H'^*\Psi; \qquad (9)$$

следовательно,

$$\int_{-N}^{N}\int_{-N'}^{N'} |\lambda\mu|^2 d\,|E(\lambda\mu)\Psi|^2 = \left|\int_{-N}^{N}\int_{-N'}^{N'} \lambda\mu\, dE(\lambda, \mu)\,\Psi\right|^2 =$$

$$= |E(\triangle, \triangle')\, H'^*\Psi|^2 \leqslant |H'^*\Psi|^2.$$

Таким образом $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda\mu|^2 d\,|E(\lambda, \mu)\Psi|^2 < +\infty$, т. е. $H_0\Psi$ имеет смысл; переходя в (8) к пределу при $N, N' \to +\infty$, получаем

$$H'^*\Psi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\mu\, dE(\lambda, \mu)\,\Psi = H_0\Psi,$$

так что

$$H'^* \subset H_0. \qquad (10)$$

Но, с другой стороны, из (7) и (6) выводим

$$H'^* \supset H_0^* \supset H_0, \qquad (11)$$

следовательно,

$$H'^* = H_0^* = H_0 \qquad (12)$$

и H_0 — самосопряженный оператор. Далее ([3])

$$H_1 \times H_2 = \tilde{H}' = H'^{**} = H_0^* = H_0,$$

так что $H_1 \times H_2$ — самосопряженный оператор и для него имеет место представление (2).

Остается доказать, что $F(\nu)$ в (3) будет спектральным разложением $H_1 \times H_2$. Прежде всего из (4) следует, что $F(\nu)$ — проекционный оператор и

$$F(\nu')F(\nu) = F(\nu') \quad \text{при} \quad \nu' \leqslant \nu$$

(ибо область $\lambda\mu < \nu'$ содержится в области $\lambda\mu < \nu$). Далее, из самого определения $F(\nu)$ следует, что $F(\nu)$ непрерывно слева. Кроме того, беря произвольный прямоугольник $\triangle = (\triangle_1, \triangle_2)$ при достаточно большом $\nu > 0$, имеем (см. фиг. 1 и 2)

$$F(-\nu)\cdot E(\triangle) = 0, \quad F(\nu)\cdot E(\triangle) = E(\triangle),$$

следовательно,

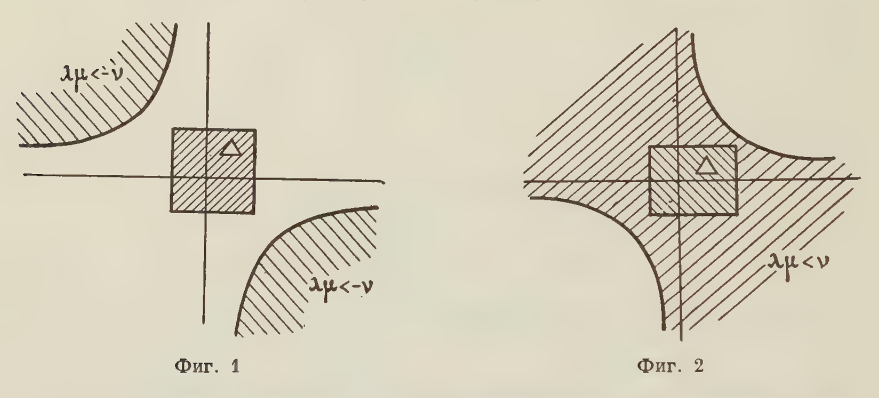
$$F(-\infty)\cdot E(\triangle)=0, \quad F(+\infty)\cdot E(\triangle)=E(\triangle).$$

Переходя к пределу при $N, N'\to+\infty$, в силу

$$E(\triangle)=E_1^{(1)}(\triangle_1)\cdot E_2^{(2)}(\triangle_2)\to 1,$$

получим

$$F(-\infty)=0, \quad F(+\infty)=1.$$



Фиг. 1 Фиг. 2

Таким образом доказано, что $F(\nu)$—спектральное разложение. Положим теперь $\triangle=(\nu_1, \nu_2)$, $(\nu_2>\nu_1)$. Тогда для произвольного $\Phi\in\mathfrak{H}$

$$\big((H_1\times H_2)F(\triangle)\Phi, \Phi\big)=\Big((H_1\times H_2)\iint\limits_{\nu_1\leqslant\lambda\mu<\nu_2} dE(\lambda, \mu)\Phi, \Phi\Big)=$$

$$=\Big(\iint\limits_{\nu_1\leqslant\lambda\mu<\nu_2} d\int^{\lambda}\int^{\mu}\lambda_1\mu_1 dE(\lambda_1, \mu_1)\Phi, \Phi\Big)=\iint\limits_{\nu_1\leqslant\lambda\mu<\nu_2}\lambda\mu d(E(\lambda, \mu)\Phi, \Phi);$$

но последнее выражение заключено между

$$\nu_1\Big(\iint\limits_{\nu_1\leqslant\lambda\mu<\nu_2} dE(\lambda, \mu)\Phi, \Phi\Big) \quad \text{и} \quad \nu_2\Big(\iint\limits_{\nu_1\leqslant\lambda\mu<\nu_2} dE(\lambda, \mu)\Phi, \Phi\Big),$$

т. е. между $\nu_1(F(\triangle)\Phi, \Phi)$ и $\nu_2(F(\triangle)\Phi, \Phi)$, а это означает, что $F(\nu)$ — спектральное разложение $H_1\times H_2$.

Следствие 1. *Если H_1, H_2 — самосопряженные операторы, $E_1(\lambda)$, $E_2(\mu)$ — их спектральные разложения, то $H_1^{(1)}$, $H_2^{(2)}$ — также самосопряженные операторы и $E_1^{(1)}(\lambda)$, $E_2^{(2)}(\mu)$ — их спектральные разложения.*

Так как $H_1^{(1)}=H_1\times 1$, $H_2^{(2)}=1\times H_2$ и 1 — самосопряженный оператор, то $H_1^{(1)}$, $H_2^{(2)}$ — самосопряженные по теореме 3.

Утверждение относительно $E_1^{(1)}(\lambda)$, $E_2^{(2)}(\mu)$ проверяется непосредственно.

Следствие 2. *Если H_1, H_2 — положительно определенные операторы, то и $H_1\times H_2$ — положительно определенный оператор.*

В самом деле, если $\triangle$ или $\triangle'$ находятся на отрицательной оси, то $E(\triangle, \triangle') = E_1(\triangle) \times E_2(\triangle') = 0$, следовательно,

$$\left((H_1 \times H_2)\Phi, \Phi\right) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \lambda\mu \, d \left(E(\lambda, \mu)\Phi, \Phi\right) \geqslant 0.$$

Следствие 3. *Нулевое подпространство $\mathfrak{N}$ оператора $H_1 \times H_2$ выражается через нулевые подпространства $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ самосопряженных операторов H_1, H_2 по формуле*

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{H}_2 \oplus (\mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{N}_1) \times \mathfrak{N}_2. \tag{13}$$

В самом деле, равенство

$$|H\Phi|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda\mu|^2 d\, |E(\lambda, \mu)\Phi|^2 = 0$$

возможно тогда и только тогда, когда $E(\triangle, \triangle')\Phi = 0$ при $0 \overline{\in} \triangle, 0 \overline{\in} \triangle'$. Следовательно, $\Phi \in \mathfrak{N}$ эквивалентно

$$\Phi = \int\limits_{\lambda\mu=0}\int dE(\lambda, \mu)\Phi =$$

$$= E_1^{(1)}(+0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} dE_2^{(2)}(\mu)\Phi + E_2^{(2)}(+0)\left(\int\limits_{-\infty}^{-0} + \int\limits_{+0}^{+\infty} dE_1^{(1)}(\lambda)\Phi\right) =$$

$$= \left[E_1^{(1)}(+0) + E_2^{(2)}(+0)\left(1 - E_1^{(1)}(+0)\right)\right]\Phi,$$

т. е. $\mathfrak{N}$ совпадает с прямой суммой взаимно ортогональных областей изменения операторов $E_1^{(1)}(+0)$ и $E_2^{(2)}(+0)\left(1 - E_1^{(1)}(+0)\right)$, которые, как легко видеть, совпадают с $\mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{H}_2$ и $(\mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{N}_1) \times \mathfrak{N}_2$.

ТЕОРЕМА 4. *Операторы $H_1 \times H_2$, $H_1^{(1)} H_2^{(2)}$, $H_2^{(2)} H_1^{(1)}$ имеют одну и ту же область определения и*

$$H_1 \times H_2 = H_1^{(1)} H_2^{(2)} = H_2^{(2)} H_1^{(1)}. \tag{14}$$

Доказательство. Обозначим через $L, L_{12}, L_1^{(1)}, L_2^{(2)}, L_1, L_2$ области определения $H_1 \times H_2$, $H_1^{(1)} H_2^{(2)}$, $H_1^{(1)}, H_2^{(2)}$, H_1, H_2 соответственно. Пусть $\Phi \in L$, так что сходится $C = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda\mu|^2 d\, |E(\lambda, \mu)\Phi|^2$. Разобьем λ- и μ-оси на интервалы $\triangle_k$, $\triangle_j'$ длины $\varepsilon (> 0)$; пусть

$$\lambda_k = \min_{\lambda \in \Delta_k} |\lambda|, \quad \mu_j = \min_{\mu \in \Delta'_j} |\mu|.$$

Тогда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\lambda_k|^2 \cdot |\mu_j|^2 \, |E_1^{(1)}(\triangle_k) \cdot E_2^{(2)}(\triangle_j')\Phi|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\Delta_k}\int\limits_{\Delta_j'} |\lambda\mu|^2 d\, |E(\lambda, \mu)\Phi|^2 = C,$$

так что ряд слева сходится. Но тогда сходится также каждый из рядов

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\mu_j|^2 \, |E_1^{(1)}(\Delta_k) \cdot E_2^{(2)}(\Delta'_j)\Phi|^2; \tag{15}$$

так как существует конечное число рядов с $|\lambda_k| < 1$, то сходится также каждый из рядов в

$$\sum_{|\lambda_k|<1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\mu_j|^2 |E_1^{(1)}(\Delta_k) \cdot E_2^{(2)}(\Delta'_j)\Phi|^2 +$$

$$+ \sum_{|\lambda_k|\geqslant 1} |\lambda_k| \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\mu_j|^2 |E_1^{(1)}(\Delta_k) \cdot E_2^{(2)}(\Delta'_j)\Phi|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\mu_j|^2 |E_1^{(1)}(\Delta_k) \cdot E_2^{(2)}(\Delta'_j)\Phi|^2$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\mu_j|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |E_1^{(1)}(\Delta_k) \cdot E_2^{(2)}(\Delta'_j)\Phi|^2$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\mu_j|^2 \, |E_2^{(2)}(\Delta'_j)\Phi|^2 .$$

Но

$$\left| \int_{-N}^{N} \mu \, dE_2^{(2)}(\mu)\Phi - \sum_{j=-n_1}^{n_2} \mu_j E_2^{(2)}(\Delta'_j)\Phi \right|^2$$

$$= \sum_{j=-n_1}^{n_2} |\mu - \mu_j|^2 d\, |E_2^{(2)}(\mu)\Phi|^2 \leqslant \varepsilon^2 |\Phi|^2 \quad \left((-N, N) \subset \sum_{j=-n_1}^{n_2} \Delta'_j \right), \tag{16}$$

следовательно,

$$\int_{-N}^{N} |\mu|^2 d\, |E_2^{(2)}(\mu)\Phi|^2 =$$

$$= \left| \int_{-N}^{N} \mu \, dE_2^{(2)}(\mu)\Phi \right|^2 \leqslant \left[\left(\sum_{j=-n_1}^{n_2} |\mu_j|^2 |E_2^{(2)}(\Delta'_j)\Phi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon |\Phi| \right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left[\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\mu_j|^2 |E_2^{(2)}(\Delta'_j)\Phi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon |\Phi| \right]^2, \tag{17}$$

так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mu|^2 d\, |E_2^{(2)}(\mu)\Phi|^2 < +\infty, \quad \Phi \in L_2^{(2)}$$

Так как $E_1^{(1)}(\lambda)$, $E_2^{(2)}(\mu)$ перестановочны, то отсюда следует, что

$E_1^{(1)}(\triangle_k)\Phi \in L_2^{(2)}$, $H_2^{(2)} E_1^{(1)}(\triangle_k)\Phi = E_1^{(1)}(\triangle_k) H_2^{(2)}\Phi$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mu|^2 d\,|E_1^{(1)}(\triangle_k)\cdot E_2^{(2)}(\mu)\Phi|^2$ сходится. Далее из неравенства

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda_k|^2 |E_1^{(1)}(\triangle_k) H_2^{(2)}\Phi|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda_k|^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mu|^2 d\,|E_1^{(1)}(\triangle_k)\cdot E_2^{(2)}(\mu)\Phi|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda\mu|^2 d\,|E_1^{(1)}(\lambda)\cdot E_2^{(2)}(\mu)\Phi|^2$$

следует, что первый ряд слева сходится, а отсюда, как и в (16) и (17), заключаем, что сходится $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 d\,|E_1^{(1)}(\lambda)\cdot H_2^{(2)}\Phi|^2$, т. е.

$$H_2^{(2)}\Phi \in L_1^{(1)}, \quad \Phi \in L_{12}.$$

Переходя в равенстве

$$\int\limits_{-N}^{N}\int\limits_{-N'}^{N'} \lambda\mu\, dE(\lambda,\mu)\Phi = \int\limits_{-N}^{N} \lambda\, d\left(E_1^{(1)}(\lambda)\int\limits_{-N'}^{N'} \mu\, dE_2^{(2)}(\mu)\Phi\right)$$

к пределу при $N \to +\infty$, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-N'}^{N'} \lambda\mu\, dE(\lambda,\mu)\Phi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\left(E_1^{(1)}(\lambda)\int\limits_{-N'}^{N'} \mu\, dE_2^{(2)}(\mu)\Phi\right),$$

следовательно,

$$\left| H_1^{(1)} H_2^{(2)}\Phi - \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-N'}^{N'} \lambda\mu\, dE(\lambda,\mu)\Phi\right|^2 =$$

$$= \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\left(E_1^{(1)}(\lambda)\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mu\, dE_2^{(2)}(\mu)\Phi\right) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\left(E_1^{(1)}(\lambda)\cdot\int\limits_{-N'}^{N'} \mu\, dE_2^{(2)}(\mu)\Phi\right)\right|^2 =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 d\left(\int\limits_{-\infty}^{-N'} + \int\limits_{N'}^{+\infty} |\mu|^2 |E_2^{(2)}(\mu)\cdot E_1^{(1)}(\lambda)\Phi|^2\right) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 d\left| E_1^{(1)}(\lambda)\left(1 - E_2^{(2)}(N') + E_2^{(2)}(-N')\right) H_2^{(2)}\Phi\right|^2 =$$

$$= \left|\left(1 - E_2^{(2)}(N') + E_2^{(2)}(-N')\right) H_1^{(1)} H_2^{(2)}\Phi\right|^2.$$

Так как при $N' \to +\infty$,

$$E_2^{(2)}(N') \to 1, \quad E_2^{(2)}(-N') \to 0,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-N'}^{N'} \lambda\mu\, dE(\lambda,\mu)\Phi \to (H_1 \times H_2)\Phi,$$

то, переходя к пределу, получаем

$$|H_1^{(1)} H_2^{(2)}\Phi - (H_1 \times H_2)\Phi|^2 = 0,$$

т. е.

$$H_1^{(1)} H_2^{(2)} \Phi = (H_1 \times H_2) \Phi.$$

Таким образом доказано, что

$$H_1 \times H_2 \subset H_1^{(1)} H_2^{(2)}. \tag{18}$$

Пусть теперь $\Phi \in L_{12}$; тогда $\Phi \in L_2^{(2)}$, $H_2^{(2)} \Phi \in L_1^{(1)}$; следовательно, сходится

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 d\, |E_1^{(1)}(\lambda) H_2^{(2)} \Phi|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 d \left| \int_{-\infty}^{\infty} E_1^{(1)}(\lambda) \cdot \mu\, dE_2^{(2)}(\mu) \Phi \right|^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 d \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\mu|^2 d\, |E_1^{(1)}(\lambda) \cdot E_2^{(2)}(\mu) \Phi|^2 \right).$$

Поэтому из неравенства

$$\int_{-N}^{N} \int_{-N'}^{N'} |\lambda\mu|^2 d\, |E(\lambda, \mu) \Phi|^2 = \int_{-N}^{N} |\lambda|^2 d \left(\int_{-N'}^{N'} |\mu|^2 d\, |E_1^{(1)}(\lambda) \cdot E_2^{(2)}(\mu) \Phi|^2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 d \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\mu|^2 d\, |E_1^{(1)}(\lambda) \cdot E_2^{(2)}(\mu) \Phi|^2 \right)$$

следует, что сходится также $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda\mu|^2 d\, |E(\lambda, \mu) \Phi|^2$, т. е. $\Phi \in L$

Таким образом $L_{12} = L$, $H_1 \times H_2 = H_1^{(1)} H_2^{(2)}$; совершенно аналогично $H_1 \times H_2 = H_2^{(2)} H_1^{(1)}$.

§ 3. Каноническое представление прямого произведения операторов

Как показал J. v. Neumann (³), всякий N-оператор допускает каноническое представление

$$A = WH, \tag{1}$$

где H — положительный самосопряженный оператор, имеющий ту же область определения, что и A, а W — частично изометричный оператор, нулевое подпространство которого совпадает с нулевым подпространством H.

ЛЕММА 1. *Операторы W и H определяются однозначно следующими условиями:*

1° *H — положительный самосопряженный оператор, метрически равный A (т. е. A и H имеют одну и ту же область определения и в ней $|Af| = |Hf|$);*

2° *W — ограниченный оператор, удовлетворяющий* (1);

3° *нулевые подпространства W и H совпадают.*

Доказательство. Условие 1° определяет H однозначно (³). Из (1) следует, что W определен однозначно на HL (L — область определения H и A) и в силу

$$|WHf| = |Af| = |Hf|$$

изометричен в HL. Поэтому, по непрерывности, он определен и изометричен в $\overline{HL}$ ($\overline{HL}$ — замыкание HL). Если обозначить через $\mathfrak{N}$ нулевое подпространство H, то в силу $\mathfrak{N} = \mathfrak{H} \ominus \overline{HL}$, W определен также в $\mathfrak{H} \ominus \overline{HL}$, а именно, в силу 3° равен там нулю. Следовательно, W определен во всем $\mathfrak{H}$.

ЛЕММА 2. *Если W_1, W_2 — частично-изометричные операторы в $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ с нулевыми подпространствами $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, то $W_1 \times W_2$ — частично-изометричный оператор в $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ с нулевым подпространством*

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{H}_2 \oplus (\mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{N}_1) \times \mathfrak{N}_2.$$

Доказательство. Частичная изометричность W эквивалентна равенству

$$W^* W = E, \tag{2}$$

где E — проекционный оператор, имеющий то же нулевое подпространство, что и W. Тогда (см. конец § 1)

$$(W_1 \times W_2)^* (W_1 \times W_2) = W_1^{(1)*} \cdot W_2^{(2)*} \cdot W_1^{(1)} \cdot W_2^{(2)} = \\ = W_1^{(1)*} \cdot W_1^{(1)} \cdot W_2^{(2)*} \cdot W_2^{(2)} = E_1^{(1)} E_2^{(2)} = E_1 \times E_2,$$

причем $E_1 \times E_2$ — проекционный оператор с нулевым подпространством (см. следствие 3 § 2)

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{H}_2 \oplus (\mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{N}_1) \times \mathfrak{N}_2.$$

ТЕОРЕМА 5. *Если A_1, A_2 суть N-операторы в $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, а*

$$A_1 = W_1 H_1, \quad A_2 = W_2 H_2 \tag{3}$$

— их канонические представления, то операторы W, H в каноническом представлении

$$A_1 \times A_2 = WH \tag{4}$$

определяются по формулам

$$W = W_1 \times W_2, \quad H = H_1 \times H_2. \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим через L, L_1, L_2 области определения $A = A_1 \times A_2$ и H, A_1 и H_1, A_2 и H_2 соответственно, а через $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ — их нулевые подпространства. Положим $H_0 = H_1 \times H_2$, $W_0 = W_1 \times W_2$; тогда H_0 — положительный самосопряженный оператор (см. следствие 2 § 2), а W_0 — изометричный оператор. Далее, для произвольных $f \in L_1$, $g \in L_2$ имеем

$$A (f \times g) = A_1 f \times A_2 g = W_1 H_1 f \times W_2 H_2 g = \\ = W_0 (H_1 f \times H_2 g) = W_0 H' (f \times g), \tag{6}$$

а отсюда, в силу линейности A и $W_0 H_0$,

$$A' = W_0 H', \tag{7}$$

где A', H_0' — операторы A и H_0, рассматриваемые только на совокупности L' всех линейных комбинаций $\sum_{k-1}^{r} \alpha_k (f_k \times g_k)$, $f_k \in L_1$, $g_k \in L_2$. С другой стороны, из леммы 2 и следствия 3 § 2 следует, что W_0 и H_0 имеют

одно и то же нулевое подпространство $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{H}_2 \oplus (\mathfrak{H}_1 - \mathfrak{N}_1) \times \mathfrak{N}_2$; поэтому W_0 изометрично в

$$\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 - \mathfrak{N}_0 = \overline{H_0 L} \supset H_0 L \supset H_0' L'.$$

Но тогда, для любого $\Phi' \in L'$ (см. (7)) $|A'\Phi| = |H_0'\Phi|$, следовательно, $\tilde{A}' = A$ и $\tilde{H}_0' = H_0$ имеют одну и ту же область определения L и в ней

$$A = W_0 H_0.$$

Кроме того, W_0 изометричен в $H_0 L$, следовательно, W_0 и H_0 метрически равны. Таким образом W_0 и H_0 удовлетворяют условиям 1°, 2°, 3° леммы 1, а потому

$$W = W_0 = W_1 \times W_2, \quad H = H_0 = H_1 \times H_2.$$

ТЕОРЕМА 6. *Если A_1, A_2 суть N-операторы в $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, то*

$$(A_1 \times A_2)^* = A_1^* \times A_2^*, \tag{8}$$

$$(A_1^{(1)})^* = A_1^{*(1)}, \quad (A_2^{(2)})^* = A_2^{*(2)}, \tag{9}$$

$$A_1 \times A_2 = A_1^{(1)} A_2^{(2)} = A_2^{(2)} A_1^{(1)}. \tag{10}$$

Доказательство. Обозначим через L_1^*, L_2^*, L^* области определения A_1^*, A_2^* и $A^* = (A_1 \times A_2)^*$, через $\mathfrak{N}_1^*$, $\mathfrak{N}_2^*$, $\mathfrak{N}^*$ — их нулевые подпространства и через F_1, F_2, F — проекционные операторы на $\mathfrak{H}_1 - \mathfrak{N}_1^*$, $\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{N}_2^*$, $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 - \mathfrak{N}^*$ соответственно. Как показал J. v. Neumann ([3]), канонические представления A_1^*, A_2^*, A^* имеют вид

$$A_1^* = W_1^* B_1, \quad A_2^* = W_2^* B_2, \quad A^* = W^* B, \tag{11}$$

где B_1, B_2, B — некоторые положительные самосопряженные операторы; кроме того,

$$A_1^* = H_1 W_1^*, \quad A_2^* = H_2 W_2^*, \quad A^* = H W^*. \tag{12}$$

Из (11) следует, что

$$W_1 W_1^* = F_1, \quad W_2 W_2^* = F_2, \quad W W^* = F. \tag{13}$$

Пусть $\Phi \in L^*$ — элемент, удовлетворяющий условию

$$F\Phi = \Phi; \tag{14}$$

так как в силу (12) $W^*\Phi \in L$, то существует последовательность

$$\Phi_n' = \sum_{k=1}^{r_n} \alpha_k^n \, (f_k^n \times g_k^n) \to W^*\Phi, \quad f_k^n \in L_1, \quad g_k^n \in L_2 \tag{15}$$

такая, что

$$H\Phi_n' = \sum_{k=1}^{r_n} \alpha_k^n \, (H_1 f_k^n \times H_2 g_k^n) \to H W^* \Phi = A^* \Phi. \tag{16}$$

Так как $WW^*\Phi = F\Phi = \Phi$, то из (15) получаем

$$W\Phi_n' = \sum_{k=1}^{r_n} \alpha_k^n \, (W_1 f_k^n \times W_2 g_k^n) \to \Phi. \tag{17}$$

Положим

$$W_1 f_k^n = \varphi_k^n, \quad W_2 g_k^n = \psi_k^n;$$

тогда

$$W_1^* \varphi_k^n = W_1^* W_1 f_k^n = E_1 f_k^n \in L_1, \quad W_2^* \psi_k^n = W_2^* W_2 g_k^n = E_2 g_k^n \in L_2,$$

следовательно,

$$\varphi_k^n \in L_1^*, \quad \psi_k^n \in L_2^*$$

и

$$A_1^* \varphi_k^n = H_1 W_1^* \varphi_k^n = H_1 E_1 f_k^n = H_1 f_k^n,$$
$$A_2^* \psi_k^n = H_2 W_2^* \psi_k^n = H_2 E_2 g_k^n = H_2 g_k^n,$$

ибо $(1-E_1) f_k^n \in \mathfrak{N}_1$, $(1-E_2) g_k^n \in \mathfrak{N}_2$, где H_1 и H_2 обращаются в нуль. Поэтому можно (17) и (16) переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{r_n} \alpha_k^n (f_k^n \times \psi_k^n) \to \Phi, \tag{17a}$$

$$\sum_{k=1}^{r_n} \alpha_k^n (A_1^* \varphi_k^n \times A_2^* \psi_k^n) \to A^* \Phi, \tag{16a}$$

так что $(A_1^* \times A_2^*) \Phi$ имеет смысл и равен $A^* \Phi$.

Пусть теперь Φ — произвольный элемент L^*; так как F приводит B, имеющий область определения L^*, то $F\Phi \in L^*$ и, кроме того, удовлетворяет (14). Поэтому, полагая

$$\Phi = F\Phi + (1-F)\Phi,$$

согласно предыдущему получаем, что $(A_1^* \times A_2^*) F\Phi$ имеет смысл и равен $A^* F\Phi$; кроме того, $(1-F)\Phi \in \mathfrak{N}^*$, следовательно, $A^*(1-F)\Phi = 0$, а так как $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{N}_1^* \times \mathfrak{H}_2 \oplus (\mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{N}_1^*) \times \mathfrak{N}_2$, то непосредственно проверяется, что в $\mathfrak{N}^*$ также $A_1^* \times A_2^*$ имеет смысл и обращается в нуль.

В самом деле, $\mathfrak{N}_1^* \times \mathfrak{H}_2$, например, есть замкнутая линейная оболочка прямых произведений $f \times g$, где $f \in \mathfrak{N}_1^*$, $g \in L_2^*$; но на таком произведении

$$(A_1^* \times A_2^*)(f \times g) = A_1^* f \times A_2^* g = 0 \times A_2^* g = 0,$$

следовательно, в силу замкнутости $A_1^* \times A_2^*$, этот оператор обращается в нуль на $\mathfrak{N}_1^* \times \mathfrak{H}_2$ и, аналогично, на $(\mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{N}_1^*) \times \mathfrak{N}_2^*$. Таким образом также имеет смысл

$$(A_1^* \times A_2^*)(1-F)\Phi = 0,$$

следовательно, $(A_1^* \times A_2^*)\Phi$ имеет смысл и равен $A^*\Phi$, так что

$$A^* \subset A_1^* \times A_2^*. \tag{18}$$

С другой стороны, для $f \in L_1^*$, $g \in L_2^*$,

$$(A_1^* \times A_2^*)(f \times g) = H_1 W_1^* f \times H_2 W_2^* g = (H_1 \times H_2)(W_1^* \times W_2^*)(f \times g) = A^*(f \times g),$$

следовательно, на всех линейных комбинациях таких $f \times g$

$$A_1^* \times A_2^* = A^*.$$

Так как A^* — замкнутый оператор, а $A_1^* \times A_2^*$ — минимальное замыкание оператора $C = A_1^* \times A_2^*$ и рассматриваемого только на этих линейных комбинациях, то $A_1^* \times A_2^* \subset A^*$. Сравнивая это соотношение с (18), видим, что $A^* = A_1^* \times A_2^*$. В частности,

$$A_1^{(1)*} = (A_1 \times 1)^* = A_1^* \times 1 = A_1^{*(1)},$$

и аналогично $A_2^{(2)*} = A_2^{*(2)}$. Таким образом (8) и (9) доказаны.

Для доказательства (10) отметим прежде всего, что

$$A_1^{(1)} = W_1^{(1)} H_1^{(1)}, \qquad A_2^{(2)} = W_2^{(2)} H_2^{(2)}$$

будут каноническими представлениями $A_1^{(1)}$ и $A_2^{(2)}$. Далее, если $E_1^{(1)}(\lambda)$ — спектральное разложение $H_1^{(1)}$, то $W_2^{(2)}$ и $E_1^{(1)}(\lambda)$ перестановочны (см. теорему 2); следовательно, $W_2^{(2)}$ перестановочно с $H_1^{(1)}$, т. е.

$$W_2^{(2)} H_1^{(1)} \subset H_1^{(1)} W_2^{(2)}.$$

Но тогда

$$A_1 \times A_2 = W_1^{(1)} W_2^{(2)} H_1^{(1)} H_2^{(2)} \subset W_1^{(1)} H_1^{(1)} W_2^{(2)} H_2^{(2)} = A_1^{(1)} A_2^{(2)} \tag{19}$$

и аналогично

$$A_1 \times A_2 \subset A_2^{(2)} \cdot A_1^{(1)}. \tag{20}$$

Применяя (20) к A_1^*, A_2^*, получим в силу (9)

$$A_1^* \times A_2^* \subset A_2^{*(2)} \cdot A_1^{*(1)} = A_2^{(2)*} \cdot A_1^{(1)*},$$

следовательно,

$$(A_1^* \times A_2^*)^* \supset (A_2^{(2)*} \cdot A_1^{(1)*})^* \supset A_1^{(1)**} \cdot A_2^{(2)**} = A_1^{(1)} \cdot A_2^{(2)}. \tag{21}$$

Но так как согласно (8)

$$(A_1^* \times A_2^*)^* = A_1^{**} \times A_2^{**} = A_1 \times A_2,$$

то из (21) следует

$$A_1 \times A_2 \supset A_1^{(1)} A_2^{(2)}. \tag{22}$$

Сравнивая (19) и (22), получаем, что $A_1 \times A_2 = A_1^{(1)} A_2^{(2)}$; совершенно аналогично выводим, что $A_1 \times A_2 = A_2^{(2)} A_1^{(1)}$.

Следствие 1. *Если H_1, H_2 — симметрические операторы, то и $H_1 \times H_2$ — симметрический оператор.*

Симметричность H_1, H_2 означает, что $H_1^* \supset H_1$, $H_2^* \supset H_2$; следовательно,

$$(H_1 \times H_2)^* = H_1^* \times H_2^* \supset H_1 \times H_2.$$

Следствие 2. *Если A_1, A_2 суть N-операторы в $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, то*

$$(A^{(1)} A_2^{(2)})^* = A_1^{(1)*} \cdot A_2^{(2)*}. \tag{23}$$

В самом деле,

$$(A_1^{(1)} A_2^{(2)})^* = (A_1 \times A_2)^* = A_1^* \times A_2^* = A_1^{*(1)} A_2^{*(2)} = A_1^{(1)*} A_2^{(2)*}.$$

§ 4. Индекс дефекта прямого произведения симметрических операторов

ТЕОРЕМА 7. *Если H_1, H_2 — два симметрических несамосопряженных оператора в $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, то индекс дефекта оператора $H = H_1 \times H_2$ равен (∞, ∞).*

Доказательство. Обозначим индексы дефекта H_1, H_2 через (m_1, n_1), (m_2, n_2) соответственно. Так как H_1, H_2 — несамосопряженные операторы, то $m_1 + n_1 \neq 0$, $m_2 + n_2 \neq 0$. Положим для определенности, что $m_1 \neq 0$, $m_2 \neq 0$; остальные случаи легко приводятся к этому умножением одного или обоих операторов H_1, H_2 на -1. Пусть $\mathfrak{N}_\alpha^{(1)}$, $\mathfrak{N}_\alpha^{(2)}$, $\mathfrak{N}_\alpha$ — подпространства векторов, удовлетворяющих соответственно соотношениям

$$\left.\begin{aligned} H_1^* f &= \alpha f \\ H_2^* g &= \alpha g \end{aligned}\right\} J(\alpha) > 0,$$

$$H^* \Phi = \alpha \Phi \quad J(\alpha) \neq 0.$$

Так как число измерений $\mathfrak{N}_\alpha^{(1)}$, $\mathfrak{N}_\alpha^{(2)}$ равно соответственно m_1, m_2, т. е. $\neq 0$, то $\mathfrak{N}_\alpha^{(1)} \neq (0)$, $\mathfrak{N}_\alpha^{(2)} \neq (0)$ (при $J(\alpha) > 0$). Положим теперь

$$\alpha = \xi + i\eta, \quad \beta = -\frac{i}{\alpha} = \frac{\eta - i\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \xi < 0, \quad \eta > 0;$$

так как $J(\beta) = -\frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} > 0$, то существуют векторы f_α, $g_\beta \neq 0$ и такие, что $H_1^* f_\alpha = \alpha f_\alpha$, $H_2^* g_\beta = \beta g_\beta$. Но тогда

$$H^* (f_\alpha \times g_\beta) = H_1^* f_\alpha \times H_2^* g_\beta = \alpha f_\alpha \times \beta g_\beta = \alpha\beta (f_\alpha \times g_\beta) = -i (f_\alpha \times g_\beta),$$

так что $(f_\alpha \times g_\beta) \in \mathfrak{N}_{-i}$.

Возьмем теперь n различных чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \quad R(\alpha_k) < 0, \quad J(\alpha_k) > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

и положим $\beta_k = -\frac{i}{\alpha_k}$. В силу предыдущего, $(f_{\alpha_k} \times g_{\beta_k}) \in \mathfrak{N}_{-i}$, а с другой стороны, вектора $f_{\alpha_1} \times g_{\beta_1}, f_{\alpha_2} \times g_{\beta_2}, \ldots, f_{\alpha_n} \times g_{\beta_n}$ линейно независимы. В самом деле, $f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n}$ линейно независимы, как соответствующие разным собственным значениям $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$; далее, из соотношения

$$\sum_{k=1}^{n} c_k (f_{\alpha_k} \times g_{\beta_k}) = 0$$

следует

$$0 = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k (f_{\alpha_k} \times g_{\beta_k}),\ f \times g \right) = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k (g_{\beta_k}, g) f_{\alpha_k}, f \right),$$

а так как f — произвольный элемент,

$$\sum_{k=1}^{n} c_k (g_{\beta_k}, g) f_{\alpha_k} = 0.$$

Следовательно, при произвольном g,

$$c_k(g_{\beta_k}, g) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n;$$

полагая $g = g_{\beta_k}$, получаем $c_k |g_{\beta_k}|^2 = 0$, $c_k = 0$.

Таким образом, $\mathfrak{N}_{-i}$ содержит сколько угодно линейно независимых элементов, т. е. число измерений $\mathfrak{N}_{-i}$ равно ∞.

Совершенно аналогично доказываем, что число измерений $\mathfrak{N}_i$ также равно ∞, т. е. индекс дефекта $H_1 \times H_2$ равен ∞.

ЛЕММА 3. *Если A_1 есть N-оператор в $\mathfrak{H}_1$, то λ является собственным значением A_1 тогда и только тогда, когда λ — собственное значение $A_1^{(1)}$. Соответствующие собственные подпространства $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_1^{(1)}$ операторов $A_1, A_1^{(1)}$ связаны соотношением*

$$\mathfrak{M}_1^{(1)} = \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{H}_2. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_1^{(1)}$ — подпространства всех векторов f, Φ, удовлетворяющих, соответственно, условиям

$$A_1 f = \lambda f, \quad A_1^{(1)} \Phi = \lambda \Phi,$$

причем случаи $\mathfrak{M}_1 = (0)$, $\mathfrak{M}_1^{(1)} = (0)$ не исключены. Если $f \in \mathfrak{M}_1$, $g \in \mathfrak{H}_2$, то

$$A^{(1)}(f \times g) = (A_1 f) \times g = \lambda (f \times g),$$

следовательно, $(f \times g) \in \mathfrak{M}_1^{(1)}$. Но так как $\mathfrak{M}_1^{(1)}$ линейно и замкнуто, то оно содержит также замкнутую линейную оболочку $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{H}_2$ таких $f \times g$. Таким образом

$$\mathfrak{M}_1^{(1)} \supset \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{H}_2. \tag{2}$$

С другой стороны, $\mathfrak{M}_1^{(1)}$ перпендикулярно к области изменения $A_1^{(1)*} - \bar{\lambda} 1$, следовательно, к любому вектору вида

$$A_1^{(1)*}(f \times g) - \bar{\lambda}(f \times g) = (A_1^* f - \bar{\lambda} f) \times g, \; f \in L_1^* \text{ (область определения } A_1^*), \; g \in \mathfrak{H}.$$

Поэтому $\mathfrak{M}_1^{(1)}$ перпендикулярно также к линейной замкнутой оболочке всех таких векторов, т. е. к $R_{\bar{\lambda}}^* \times \mathfrak{H}_2$, где $R_{\bar{\lambda}}^*$ — замыкание области изменения $A_1^* - \bar{\lambda} 1$. Отсюда следует, что

$$\mathfrak{M}_1^{(1)} \subset \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 \ominus R_{\bar{\lambda}}^* \times \mathfrak{H}_2 = (\mathfrak{H}_1 \ominus R_{\bar{\lambda}}^*) \times \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{H}_2. \tag{3}$$

Сравнивая (2) и (3), получаем формулу (1), из которой следуют все утверждения леммы.

Следствие 1. *Если H_1 — симметрический оператор, $\mathfrak{N}_i, \mathfrak{N}_{-i}$ — его дефектные подпространства (т. е. подпространства собственных векторов H_1^*, соответствующих собственным значениям i и $-i$), то дефектными подпространствами $H_1^{(1)}$ являются*

$$\mathfrak{N}_i^{(1)} = \mathfrak{N}_i \times \mathfrak{H}_2, \; \mathfrak{N}_{-i}^{(1)} = \mathfrak{N}_{-i} \times \mathfrak{H}_2. \tag{4}$$

Это сразу следует из леммы 3, так как $H_1^{(1)*} = H_1^{*(1)}$.

Следствие 2. *Если H_1 — симметрический оператор, (m, n) — его индекс дефекта, и p — число измерений $\mathfrak{H}_2$, то индекс дефекта $H_1^{(1)}$ равен (mp, np).*

ТЕОРЕМА 8. *Пусть H_1 — симметрический несамосопряженный, H_2 — самосопряженный оператор, $E_2(\lambda)$ — спектральное разложение H_2,*

$$E_2(-0) = \lim_{\lambda \to -0} E_2(\lambda),\ E_2(+0) = \lim_{\lambda \to +0} E_2(\lambda),$$

$$\mathfrak{M}_2^+ = (1 - E_2(+0))\mathfrak{H}_2,\ \mathfrak{M}_2^- = E_2(-0)\mathfrak{H}_2,$$

p_2^+, p_2^- — числа измерений $\mathfrak{M}_2^+$, $\mathfrak{M}_2^-$; пусть, кроме того, (m_1, n_1) — индекс дефекта H_1. Тогда индекс дефекта (m, n) оператора $H_1 \times H_2$ вычисляется по формулам

$$m = m_1 p^{2+} + n_1 p_2^-,\ n = m_1 p_2^- + n_1 p_2^+. \tag{5}$$

Доказательство. Предположим, что (5) уже доказано для случая

$$p_2^+ > 0,\ p_2^- = 0,\ E_2(+0) - E_2(-0) = 0, \tag{6}$$

т. е. пусть в этом случае

$$m = m_1 p_2^+,\ n = n_1 p_2^+. \tag{7}$$

Тогда (5) верно также в случаях

$$p_2^+ = 0,\ p_2^- > 0,\ E_2(+0) - E_2(-0) = 0, \tag{6a}$$

$$p_2^+ = p_2^- = 0,\ E_2(+0) - E_2(-0) = 1. \tag{6b}$$

В самом деле, меняя H_2 на $-H_2$, переходим от (6) к (6a), а в случае (6b) $H_2 = 0$, $H_1 \times H_2 = 0$, $m = n = 0$.

Если теперь и H_1 и H_2 произвольны, то расщепляем $\mathfrak{H}_2$ на взаимно ортогональные подпространства

$$\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{M}_2^+ + \mathfrak{M}_2^- + \mathfrak{N}_2,\ \mathfrak{N}_2 = (E_2(+0) - E_2(-0))\mathfrak{H}_2,$$

и полагаем

$$H_2^+ = H_2 \text{ в } \mathfrak{M}_2^+,\ H_2^- = H_2 \text{ в } \mathfrak{M}_2^-;$$

кроме того, $H_2 = 0$ в $\mathfrak{N}_2$. Тогда $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ расщепляется на взаимно ортогональные подпространства

$$\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 = (\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{M}_2^+) \oplus (\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{M}_2^-) \oplus (\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{N}_2),$$

приводящие $H_1 \times H_2$, причем частями $H_1 \times H_2$ в этих подпространствах являются соответственно операторы

$$H_1 \times H_2^+,\ H_1 \times H_2^-,\ 0,$$

удовлетворяющие соответственно (6a), (6b) и имеющие поэтому индексы дефекта

$$(m_1 p_2^+,\ n_1 p_2^+),\ (n_1 p_2^-,\ m_1 p_2^-),\ (0, 0). \tag{8}$$

Но тогда индекс дефекта оператора $H_1 \times H_2$, равный сумме индексов дефекта (8), равен

$$(m_1 p_2^+ + n_1 p_2^-,\ n_1 p_2^+ + m_1 p_2^-).$$

Итак, остается доказать (7) в случае (6).

Прежде всего, если $m_1^* = 0$, то $m = 0$. В самом деле, в противном случае существовал бы вектор $\Phi \neq 0$, такой, что

$$(H_1 \times H_2)^* \Phi = i\Phi, \tag{9}$$

или

$$H_1^{(1)*} \cdot H_2^{(2)} \Phi = H_2^{(2)} H_1^{(1)*} \Phi = i\Phi. \tag{10}$$

Умножая обе части (10) скалярно на $H_2^{(2)}\Phi$ (имеющий смысл в силу (10)), получаем

$$(H_1^{(1)*} H_2^{(2)} \Phi, H_2^{(2)}\Phi) = i(\Phi, H_2^{(2)} \Phi);$$

так как $(\Phi, H_2^{(2)} \Phi) > 0$, то $J(H_1^{(1)*} H_2^{(2)}\Phi, H_2^{(2)}\Phi) < 0$, т. е. $H_2^{(2)} \Phi \neq 0$ принадлежит $+$-классу $H_1^{(1)}$, что невозможно, ибо $+$-класс $H_1^{(1)}$ пустой (см. следствие 2, § 4).

Чтобы доказать (7) для $m \neq 0$, рассмотрим следующие случаи:

А. $p_2^+ = \infty$, т. е. $\mathfrak{M}_2^+ = \mathfrak{H}_2$ бесконечномерно. Пусть $g_1, \ldots, g_n$ — какие-либо линейно независимые элементы из L_2 (область определения H_2), а f — элемент $\neq 0$ и удовлетворяющий условию $H_1^* f = if$. Тогда элементы

$$\Phi_1 = f \times g_1, \ \Phi_2 = f \times g_2, \ldots, \Phi_n = f \times g_n$$

линейно независимы и любая их линейная комбинация $\Phi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Phi_k$ удовлетворяет условию $H_1^{(1)*}\Phi = i\Phi$; поэтому никакая такая линейная комбинация, отличная от нуля, не $\in L_1^{(1)}$ (область определения $H_1^{(1)}$). а следовательно, и подавно не принадлежит области определения L оператора $H_1 \times H_2 = H_2^{(2)} H_1^{(1)}$. С другой стороны, $H_2^{(2)} \Phi$ имеет смысл, $\neq 0$ при $\Phi \neq 0$ и

$$((H_1 \times H_2)^* \Phi, \Phi) = (H_2^{(2)} H_1^{(1)*} \Phi, \Phi) = i(H_2^{(2)} \Phi, \Phi).$$

Так как $(H_2^{(2)} \Phi, \Phi) > 0$, то это означает, что $\Phi \in +$-классу $H_1 \times H_2$. Итак, существует сколько угодно линейно независимых $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, никакая линейная комбинация которых, отличная от нуля, не $\in L$, но $\in +$-классу $H_1 \times H_2$. Это означает, что число измерений $(\mathrm{mod}\, L)$ $+$-класса $H_1 \times H_2$ равно ∞, т. е. $m = \infty$.

В. $p_2^+ < \infty$, т. е. $\mathfrak{M}_2^+ = \mathfrak{H}_2$ конечномерно. Тогда существует расщепление

$$\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_{21} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{H}_{2q}, \quad q \leqslant p_2^+$$

на взаимно ортогональные подпространства, приводящие H_2, причем

$$H_2 = \lambda_k 1 \text{ в } \mathfrak{H}_{2k}; \ \lambda_k > 0, \ k = 1, \ldots, q.$$

Следовательно, имеет место расщепление

$$\mathfrak{H}_2 \times \mathfrak{H}_1 = (\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_{21}) \oplus (\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_{22}) \oplus \ldots \oplus (\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_{2q})$$

на взаимно ортогональные подпространства, приводящие $H_1 \times H_2$, причем

$$H_1 \times H_2 = \lambda_k (H_1 \times 1) = \lambda_k H_1^{(1)} \text{ в } \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_{2k}, \ k = 1, \ldots, q.$$

Поэтому (см. следствие 2, § 4) первая компонента индекса дефекта $H_1 \times H_2$ в $\mathfrak{H}_2 \times \mathfrak{H}_{2k}$ равна $m_1 p_{2k}$, где p_{2k} — число измерений $\mathfrak{H}_{2k}$; но тогда первая компонента m индекса дефекта $H_1 \times H_2$ в $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ равна

$$m_1 p_{21} + \ldots + m_1 p_{2q} = m_1 (p_{21} + \ldots + p_{2q}) = m_1 p_2^+.$$

Итак, (7) доказано для m; меняя H_1 на $-H_1$, получаем (7) для n.

Пример. Пусть L_1, L_2 совокупности функций вида

$$f(x) = a + \int_0^x \varphi(\xi)\, d\xi, \quad g(y) = b + \int_0^y \psi(\eta)\, d\eta, \quad 0 \leqslant x,\ y \leqslant 1,$$

где a, b — произвольные постоянные, а $\varphi(x)$, $\psi(y)$ — функции с суммируемым квадратом в $(0, 1)$. Обозначим через M_1, M_2 части L_1, L_2, для которых $f_1(0) = f_2(0) = f_1(1) = f_2(1) = 0$ и положим

$$A_1 f = i\frac{df}{dx} = i\varphi(x), \quad A_2 g = i\frac{dg}{dy} = i\psi(y) \quad \text{на} \quad L_1, L_2,$$
$$B_1 f = A_1 f, \quad B_2 g = A_2 g \quad \text{на} \quad M_1, M_2.$$

Тогда B_1, B_2 симметрические операторы с индексом дефекта $(1, 1)$ и $B_1^* = A_1$, $B_2^* = A_2$.

Пусть L совокупность функций вида

$$f(x, y) = C + \int_0^x \varphi(\xi)\, d\xi + \int_0^y \psi(\eta)\, d\eta + \int_0^x \int_0^y \chi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \quad 0 \leqslant x,\ y \leqslant 1,$$

где $\varphi(x)$, $\psi(y)$, $\chi(x, y)$ — функции с суммируемым квадратом в $(0, 1)$, $[(0, 1);\ (0, 1)]$ соответственно. Обозначим через M часть L, для которой $f(0, y) = f(1, y) = f(x, 0) = f(x, 1) = 0$, и положим

$$Af = -f''_{xy} = -\chi(x, y) \text{ на } L, \quad Bf = Af \text{ на } M.$$

Тогда, интегрируя по частям, получаем, что

$$B \subset A^*, \quad A \subset B^*.$$

Обозначим через $L', (M')$ совокупности всех линейных комбинаций $\sum_{k=1}^{r} \alpha_k f_k(x) g_k(y)$, где $f_k \in L_1$, $g_k \in L_2$ $(f_k \in M_1,\ g_k \in M_2)$.

Тогда $M' \subset L' \subset L$, $M' \subset M$. Кроме того,

$$A_1 \times A_2 = A = B^* \quad \text{на} \quad L', \tag{11}$$
$$B_1 \times B_2 = B = A^* \quad \text{на} \quad M'. \tag{12}$$

Но так как A^*, B^* замкнутые операторы, а $A_1 \times A_2$, $B_1 \times B_2$ замыкания операторов $(A_1 \times A_2)' = A_1 \times A_2$, $(B_1 \times B_2)' = B_1 \times B_2$, и определенных только на L', M', то

$$A_1 \times A_2 \subset B^* = \tilde{B}^*, \quad A_1^* \times A_2^* = B_1 \times B_2 \subset A^* = \tilde{A}^* \tag{13}$$

и

$$A_1 \times A_2 \subset \tilde{A}, \quad B_1 \times B_2 \subset \tilde{B}. \tag{14}$$

Беря $*$ от (13), получаем

$$A_1^* \times A_2^* \supset \tilde{B}^{**} = \tilde{B}, \quad A_1 \times A_2 \supset \tilde{A}^{**} = \tilde{A}, \tag{15}$$

следовательно,

$$A_1 \times A_2 = \tilde{A}, \quad B_1 \times B_2 = \tilde{B}. \tag{16}$$

Так как B_1, B_2 симметрические операторы, то $\tilde{B} = B_1 \times B_2$ также симметрический оператор с индексом дефекта (∞, ∞). Кроме того,

$$\tilde{A}^* = A_1^* \times A_2^* = \tilde{B}, \quad \tilde{B}^* = B_1^* \times B_2^* = A_1 \times A_2 = \tilde{A}. \tag{17}$$

Таким образом понятие прямого произведения можно применить к исследованию дифференциальных операторов в частных производных. Кроме того, имеют место некоторые соотношения между дефектными подпространствами H_1, H_2 и $H_1 \times H_2$. Автор имеет в виду вернуться к этим вопросам в следующей работе. *

Математический институт
им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
15. X. 1938.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Stone M. H., Linear transformations in Hilbert space, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. XV (1932).
[2] Murray F. J. and Neumann J. v., On rings of operators, Annals of Math., vol. 37 (1936), 116—229. (Используются стр. 127—133 и 141—143).
[3] Neumann J. v., Über adjungierte Funktionaloperatoren, Annals of Math., vol. 32 (1931), 191—226.

M. NEUMARK. ON THE DIRECT PRODUCT OF CLOSED OPERATORS

SUMMARY

Let $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ be two Hilbert spaces (1), $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ their direct product (2) and A_1, A_2 linear closed operators in $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ with domains dense in $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ resp. In the present paper the notion of the direct product $A_1 \times A_2$ of A_1 and A_2 is introduced, which is a linear closed operator in $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ with a domain dense in $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$. When A_1, A_2 are both self-adjoint, $A_1 \times A_2$ is proved to be also self-adjoint and a formula for the resolution of the identity of $A_1 \times A_2$ is given. Further, a connection between the canonical decompositions of A_1, A_2 and A is given, and in the case when A_1, A_2 are symmetric, the deficiency-index of $A_1 \times A_2$ (which is then also symmetric) is calculated.

If, f. i., $A_1 = i\frac{d}{dx}$, $A_2 = i\frac{d}{dy}$, and $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ are the sets of all Lebesgue square summable functions $f(x)$, $g(y)$ on $(0, 1)$, then $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ is the set of all Lebesgue square summable functions on $[(0, 1); (0, 1)]$ and $A_1 \times A_2$ coincides with the closure of the operator $-\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$, suitably defined on some linear manifold dense in $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$.

In this way some results about the operator $-\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ are obtained, and in the same manner many results on partial differential operators may be

* Примечание при корректуре. Как я обнаружил, в данной в тексте формулировке теорема 4, а следовательно, формула (10) в теореме 6 и следствие 2 не будут справедливы в общем случае. Однако, они верны, если второй множитель в правой части (14) § 2 и (10) § 3 ограничен. При этом теорема 8 сохраняет свою силу целиком, так как можно расщепить $\mathfrak{H}_2$ на счетное число подпространств, в которых H_2 ограничен.

also deduced using the results concerning ordinary differential operators already known.

Finally it may be pointed out that all these results can be easily generalized for the case of the direct product of more then two spaces and two operators. Two spaces are here considered only for the sake of simplicity.

§ 1. Construction of the direct product

Definition 1. A linear closed operator A with a domain dense in the Hilbert space $\mathfrak{H}$ will be called an N-operator in $\mathfrak{H}$.

Definition 2. Let A_1, A_2 be N-operators in $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ resp. and L_1, L_2 their domains. We denote by L' the set of all linear combinations

$$\Phi' = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k (f_k \times g_k), \quad f_k \in L_1, \; g_k \in L_2, \tag{1}$$

and define a new operator A' in L' by

$$A' \Phi' = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k (A_1 f_k \times A_2 g_k). \tag{2}$$

($f_k \times g_k$ is the direct product of f_k and g_k.)

THEOREM 1. *$A'\Phi'$ does not depend on the representation* (1) *of Φ', but only upon Φ'. The operator A' has a closure $\tilde{A}'$, and $\tilde{A}'$ is an N-operator in $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$.*

Proof. We have only to prove that from $\Phi' = 0$, $\Phi' \in L'$, it follows that $A'\Phi' = 0$, and that from

$$|\Phi'_n| \to 0, \; |A'\Phi'_n - A'\Phi'_m| \to 0, \quad n, m \to \infty, \; \Phi'_n \in L' \tag{3}$$

it follows that $|A'\Phi'_n| \to 0$, $n \to \infty$.

If $\Phi' = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k (f_k \times g_k) = 0$, then for $f \in L_1^*$, $g \in L_2^*$ (the domains of A_1^*, A_2^* resp.),

$$(A'\Phi', f \times g) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k (A_1 f_k, f)(A_2 g_k, g) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k (f_k, A_1^* f)(g_k, A_2^* g) = (\Phi', A_1^* f \times A_2^* g) = 0,$$

and, therefore, L_1^* and L_2^* being dense in $\mathfrak{H}_1$ and $\mathfrak{H}_2$ ([3]) it follows that $A'\Phi' = 0$.

If, further, (3) holds for $\Phi'_n = \sum_{k=1}^{r_n} \alpha_k^n (f_k^n \times g_k^n)$, then put $\Psi = \lim_{n\to\infty} A'\Phi'_n$ and proceed to the limit in

$$(A'\Phi'_n, f \times g) = \sum_{k=1}^{r_n} \alpha_k^n (A_1 f_k^n, f)(A_2 g_k^n, g) = (\Phi'_n, A_1^* f \times A_2^* g),$$
$$f \in L_1^*, \; g \in L_2^*.$$

Then we obtain

$$(\Psi, f \times g) = (0, A_1^* f \times A_2^* g) = 0;$$

hence $\lim_{n \to \infty} A' \Phi_n' = \Psi = 0$.

Since L_1, L_2 are dense in $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ resp., L' is dense in $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$; hence the domain of $\tilde{A}'$ which $\supset L'$, is also dense in $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$, and $\tilde{A}'$ is an N-operator.

Definition 3. The operator $\tilde{A}'$ will be called the direct product of A_1 and A_2 and denoted by $A_1 \times A_2$. We put also

$$A_1^{(1)} = A_1 \times 1, \quad A_2^{(2)} = 1 \times A_2, \tag{4}$$

where 1 is the identical operator in $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ resp.

THEOREM 2. *If A_1, A_2 are bounded operators with the domains $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ resp., then $A_1 \times A_2$, $A_1^{(1)}$, $A_2^{(2)}$ are also bounded operators with the domain $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ and*

$$A_1 \times A_2 = A_1^{(1)} A_2^{(2)} = A_2^{(2)} A_1^{(1)}.$$

Proof. This follows immediately from the fact that (since A_1, A_2 are bounded) $A_1^{(1)}$, $A_2^{(2)}$ coincide with $A_1^{(1)}$, $A_2^{(2)}$ which were introduced by F. J. Murray and J. v. Neumann (2) and are bounded. We also point out that we can therefore use all the results of F. J. Murray and J. v. Neumann about $A_1^{(1)}$, $A_2^{(2)}$, if A_1 and A_2 are bounded.

§ 2. The direct product of self-adjoint operators

THEOREM 3. *If H_1, H_2 are self-adjoint operators in $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ resp., then $H_1 \times H_2$ is a self-adjoint operator in $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$. If $E_1(\lambda)$, $E_2(\mu)$ are the resolutions of the identity of H_1, H_2 resp., and $E(\lambda, \mu) = E_1(\lambda) \times E_2(\mu)$, then $(H_1 \times H_2)\Phi$ exists for those and only those $\Phi \in \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$, for which the integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda\mu|^2 \, d\, |E(\lambda, \mu)\Phi|^2 \tag{1}$$

converges, and

$$(H_1 \times H_2)\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\mu \, d\, E(\lambda, \mu)\Phi. \tag{2}$$

The resolution of the identity $F(\nu)$ of $H_1 \times H_2$ is given by the formula

$$F(\nu) = \iint_{\lambda\mu < \nu} dE(\lambda, \mu). \tag{3}$$

Proof. Since

$$E(\lambda, \mu) = E_1^{(1)}(\lambda) \cdot E_2^{(2)}(\mu)$$

and $E_1^{(1)}(\lambda)$, $E_2^{(2)}(\mu)$ are permutable, $E(\lambda, \mu)$ is a projection, and for two rectangles $\triangle, \triangle'$ having no common points, $E(\triangle) \cdot E(\triangle') = 0$. Hence from the convergence of (1) it follows the strong convergence of the integral on the right-hand side of (2).

Let us denote by H_0 the operator defined for those and only those Φ, for which (1) converges, by

$$H_0\Phi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\mu\, dE(\lambda,\mu)\,\Phi, \tag{4}$$

and let H' be the operator associated with $H_1 \times H_2$ in the same manner, as A' is associated with $A_1 \times A_2$ in definitions 2 and 3. It can be easily shown that H_0 is symmetric:

$$H_0 \subset H_0^*, \tag{5}$$

and that

$$H' \subset H_0. \tag{6}$$

If now $H'^*\Psi$ exists, i. e., if for all $\Phi \in L'$ (the domain of H')

$$(H'\Phi, \Psi) = (\Phi, H'^*\Psi),$$

put $\Phi = E_1(\triangle)f \times E_2(\triangle)g \quad (\triangle = (-N, N),\ \triangle' = (-N', N'))$.

Then we find

$$(H'(E_1(\triangle)f \times E_2(\triangle')g), \Psi) = ((E_1(\triangle)f \times E_2(\triangle')g),\ H'^*\Psi),$$

or

$$(f \times g, \int_{-N}^{N}\int_{-N'}^{N'} \lambda\mu\, dE(\lambda,\mu)\,\Psi) = (f \times g, E(\triangle, \triangle')\, H'^*\Psi).$$

Hence

$$\int_{-N}^{N}\int_{-N'}^{N'} \lambda\mu\, dE(\lambda,\mu)\,\Psi = E(\triangle, \triangle')\, H'^*\Psi, \tag{7}$$

and therefore

$$\int_{-N}^{N}\int_{-N'}^{N'} |\lambda\mu|^2 d\,|E(\lambda,\mu)\Psi|^2 = |E(\triangle, \triangle')\, H'^*\Psi|^2 \leqslant |H'^*\Psi|^2.$$

This means that $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda\mu|^2 d\,|E(\lambda,\mu)\Psi|^2$ converges, i. e., $H_0\Psi$ exists; proceeding to the limit $N \longrightarrow +\infty$ on both sides of (7) we obtain

$$H'^*\Psi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\mu\, dE(\lambda,\mu)\,\Psi = H_0\Psi.$$

So we have proved that

$$H'^* \subset H_0; \tag{8}$$

but, on the other hand, from (5) and (6) follows

$$H'^* \supset H_0^* \supset H_0,$$

which together with (8) gives

$$H'^* = H_0^* = H_0.$$

This means that H_0 is self-adjoint and that

$$H_1 \times H_2 = \tilde{H}' = H'^{**} = H_0^* = H_0.$$

To complete the proof of the theorem we have now only to prove that (3) is the resolution of the identity of $H_1 \times H_2$. It is obvious that $F(\nu)$ is a projection, that $F(\nu')F(\nu) = F(\nu')$ for $\nu' \leqslant \nu$ and that $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} F(\nu - \varepsilon) = F(\nu)$. Further, for sufficiently large $\nu > 0$,

$$F(-\nu)\, E_1^{(1)}(\triangle) \cdot E_2^{(2)}(\triangle') = 0 \quad (\triangle = (-N, N),\ \triangle' = (-N', N'));$$
$$F(\nu)\, E_1^{(1)}(\triangle) \cdot E_2^{(2)}(\triangle') = E_1^{(1)}(\triangle) \cdot E_2^{(2)}(\triangle'),$$

hence, for $\nu \to +\infty$ and then $N, N' \to +\infty$, we obtain $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 0$, so that $F(\nu)$ is a resolution of the identity. Now put $\triangle = (\nu_1, \nu_2)$; then

$$((H_1 \times H_2) F(\triangle) \Phi, \Phi) = \Big((H_1 \times H_2) \iint\limits_{\nu_1 \leqslant \lambda\mu < \nu_2} dE(\lambda, \mu)\, \Phi, \Phi\Big) =$$
$$= \iint\limits_{\nu_1 \leqslant \lambda\mu < \nu_2} \lambda\mu\, d\,(E(\lambda, \mu)\, \Phi, \Phi),$$

and therefore lies between $\nu_1 (F(\triangle)\Phi, \Phi)$ and $\nu_2 (F(\triangle)\Phi, \Phi)$. Thus $F(\nu)$ is the resolution of the identity of $H_1 \times H_2$.

Corollary 1. *If H_1, H_2 are self-adjoint operators and $E_1(\lambda)$, $E_2(\mu)$ — their resolutions of the identity, then $H_1^{(1)}$, $H_2^{(2)}$ are also self-adjoint and $E_1^{(1)}(\lambda)$, $E_2^{(2)}(\mu)$ are their resolutions of the identity.*

This follows immediately from theorem 3 and the fact that 1 is self-adjoint.

Corollary 2. *If H_1, H_2 are positive definite self-adjoint operators, then $H_1 \times H_2$ is also a positive definite self-adjoint operator.*

If $\triangle$ or $\triangle'$ lies on the negative axis, then

$$E(\triangle, \triangle') = E_1(\triangle) \times E_2(\triangle') = 0;$$

hence

$$((H_1 \times H_2)\, \Phi, \Phi) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \lambda\mu\, d\,(E(\lambda, \mu)\, \Phi, \Phi) \geqslant 0.$$

Corollary 3. *The nul-space $\mathfrak{N}$ of $H_1 \times H_2$ is connected with the nul-spaces $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ of H_1, H_2 by the following relation:*

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{H}_2 \oplus (\mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{N}_1) \times \mathfrak{N}_2.$$

Since

$$0 = |H\Phi|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda\mu|^2\, d\, |E(\lambda, \mu)\, \Phi|^2$$

is equivalent to

$$E(\triangle, \triangle')\, \Phi = 0 \quad \text{for} \quad 0 \bar{\in} \triangle,\ 0 \bar{\in} \triangle',$$

we have for such (and only such) Φ

$$\Phi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dE(\lambda, \mu)\, \Phi = \iint\limits_{\lambda\mu = 0} d\,(E_1^{(1)}(\lambda) \cdot E_2^{(2)}(\mu))\, \Phi =$$
$$= \left[E_1^{(1)}(+0) + E_2^{(2)}(+0)\,(1 - E_1^{(1)}(+0))\right] \Phi.$$

This means that $\mathfrak{N}$ is the range of

$$E_1^{(1)}(+0)+E_2^{(2)}(+0)(1-E_1^{(1)}(+0));$$

but this range can be easily shown to coincide with

$$\mathfrak{N}_1\times\mathfrak{H}_2+(\mathfrak{H}_1\ominus\mathfrak{N}_1)\times\mathfrak{N}_2.$$

THEOREM 4. *The operators* $H_1\times H_2$, $H_1^{(1)}H_2^{(2)}$, $H_2^{(2)}H_1^{(1)}$ *have one and the same domain, and*

$$H_1\times H_2=H_1^{(1)}H_2^{(2)}=H_2^{(2)}H_1^{(1)}. \tag{9}$$

Proof. Denote by L, L_{12}, $L_1^{(1)}$, $L_2^{(2)}$ the domains of $H_1\times H_2$, $H_1^{(1)}H_2^{(2)}$, $H_1^{(1)}$, $H_2^{(2)}$ resp. If $\Phi\in L$, the the integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\lambda\mu|^2 d\,|E(\lambda,\mu)\Phi|^2$ is convergent, and since for $|\lambda|>1$, we have $|\lambda\mu|>|\mu|$, the integrals

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\mu|^2 d\,|E(\lambda,\mu)\Phi|^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\mu|^2 d\,|E_2^{(2)}(\mu)\Phi|^2$$

are also convergent, i. e., $\Phi\in L_2^{(2)}$. Further, $E_1^{(1)}(\lambda)$ and $E_2^{(2)}(\mu)$ being permutable, $E_1^{(1)}(\lambda)$ and $H_2^{(2)}$ are also permutable; hence $E_1^{(1)}(\lambda)\Phi\in L$ and $H_2^{(2)}E_1^{(1)}(\lambda)\Phi=E_1^{(1)}(\lambda)H_2^{(2)}\Phi$. From

$$\int\limits_{-N}^{N}|\lambda|^2 d\,|E_1^{(1)}(\lambda)H_2^{(2)}\Phi|^2=\int\limits_{-N}^{N}|\lambda|^2 d\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\mu|^2 d\,|E_1^{(1)}(\lambda)E_2^{(2)}(\mu)\Phi|^2\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\lambda\mu|^2 d\,|E(\lambda,\mu)\Phi|^2$$

we conclude that $H_2^{(2)}\Phi\in L_1^{(1)}$ and

$$H_1^{(1)}H_2^{(2)}\Phi=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda d\Big(E_1^{(1)}(\lambda)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mu dE_2^{(2)}(\mu)\Phi\Big)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda\mu\, dE(\lambda,\mu)\Phi=(H_1\times H_2)\Phi.$$

Thus we have proved that

$$H_1\times H_2\subset H_1^{(1)}\cdot H_2^{(2)}. \tag{10}$$

If now $\Phi\in L_{12}$, then $\Phi\in L_2^{(2)}$, $H_2^{(2)}\Phi\in L_1^{(1)}$ and therefore the integral on the right-hand side of

$$\int\limits_{-N}^{N}\int\limits_{-N'}^{N'}|\lambda\mu|^2 d\,|E(\lambda,\mu)\Phi|^2=\int\limits_{-N}^{N}|\lambda|^2 d\int\limits_{-N'}^{N'}|\mu|^2 d\,|E_1^{(1)}(\lambda)\cdot E_2^{(2)}(\mu)\Phi|^2\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\lambda|^2 d\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\mu|^2 d\,|E_1^{(1)}(\lambda)\cdot E_2^{(2)}(\mu)\Phi|^2$$

is convergent. Hence

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\lambda\mu|^2 d\,|E(\lambda,\mu)\Phi|^2$$

is also convergent, i. e., $\Phi \in L$, so that

$$H_1^{(1)} H_2^{(2)} \subset H_1 \times H_2. \tag{11}$$

Combining (10) and (11) we find $H_1 \times H_2 = H_1^{(1)} H_2^{(2)}$; similarly we find $H_1 \times H_2 = H_2^{(2)} H_1^{(1)}$.

§ 3. The canonical decomposition of the direct product of operators

As J. v. Neumann (³) showed, every N-operator has a canonical decomposition

$$A = WH, \tag{1}$$

where H is a positive self-adjoint operator with the same domain as A, and W is a partially isometric operator with the same nul-space as H and A.

LEMMA 1. *The operators W and H are uniquely defined by the following conditions:*

1° *H is positive self-adjoint and metrically equal to A (i. e., A and H have the same domain, and in it $|Af| = |Hf|$);*

2° *W is a bounded operator satisfying* (1);

3° *the nul-spaces of W and H coincide.*

Proof. 1° defines H uniquely (see J. v. Neumann (³)); 2° defines W on HL and therefore on $\overline{HL}$ (since W is bounded); 3° defines W on the nul-space of H, namely

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{H} \ominus \overline{HL}.$$

LEMMA 2. *If W_1, W_2 are partially isometric operators in $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ resp., and $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ are their nul-spaces, then $W_1 \times W_2$ is partially isometric in $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ and*

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{H}_2 \oplus (\mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{N}_1) \times \mathfrak{N}_2$$

is its nul-space.

Proof. An operator W is partially isometric if and only if $W^* W = E$, where E is a projection with the same nul-space as W. Now put $W_1^* W_1 = E_1$, $W^* W_2 = E_2$; then (see the end of § 1)

$$(W_1 \times W_2)^* (W_1 \times W_2) = W_1^{(1)*} \cdot W_2^{(2)*} \cdot W_1^{(1)} \cdot W_2^{(2)} = E_1^{(1)} E_2^{(2)} = E_1 \times E$$

is a projection with the nul-space $\mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{H}_2 \oplus (\mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{N}_1) \times \mathfrak{N}_2$ (see corollary 3, § 2).

THEOREM 5. *If A_1, A_2 are N-operators and*

$$A_1 = W_1 H_1, \quad A_2 = W_2 H_2 \tag{2}$$

are their canonical decompositions, then the operators W, H in the canonical decomposition

$$A_1 \times A_2 = WH \tag{3}$$

are given by

$$W = W_1 \times W_2, \quad H = H_1 \times H_2. \tag{4}$$

Proof. Denote by L, L_1, L_2 the domains of $A = A_1 \times A_2$ and H, A_1 and H_1, A_2 and H_2 resp., by A', H' the operators associated with

$A_1 \times A_2$, $H_1 \times H_2$ as in definition 2, and by L' their common domain. Put $H_0 = H_1 \times H_2$, $W_0 = W_1 \times W_2$; by corollary 3, § 2 and lemma 2, H_0 and W_0 have the same nul-space $\mathfrak{N}_0$. Hence W_0 is isometric on the range of H_0, and therefore on the range of H'. From this fact and from the obvious equation $A' = W_0 H'$ we deduce that $A = W_0 H_0$; therefore A is metrically equal to H_0. So W_0, H_0 satisfy 1°, 2°, 3° of lemma 1; hence $W_0 = W$, $H_0 = H$.

THEOREM 6. *If A_1, A_2 are N-operators in $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, then*

$$(A_1 \times A_2)^* = A_1^* \times A_2^*, \tag{5}$$

$$(A_1^{(1)})^* = A_1^{*(1)}, \quad (A_2^{(2)})^* = A_2^{*(2)}, \tag{6}$$

$$A_1 \times A_2 = A_1^{(1)} A_2^{(2)} = A_2^{(2)} A_1^{(1)}. \tag{7}$$

Proof. Denote by L_1^*, L_2^*, L^* the domains of A_1^*, A_2^*, $A^* = (A_1 \times A_2)^*$ by $\mathfrak{N}_1^*$, $\mathfrak{N}_2^*$, $\mathfrak{N}^*$ their nul-spaces and by F_1, F_2, F the projections on $\mathfrak{H}_1 - \mathfrak{N}_1^*$, $\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{N}_2^*$, $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 - \mathfrak{N}^*$ resp. As J. v. Neumann showed (3),

$$W_1 W_1^* = F_1, \quad W_2 W_2^* = F_2, \quad W W^* = F,$$

$$A_1^* = H_1 W_1^*, \quad A_2^* = H_2 W_2^*, \quad A^* = H W^*.$$

Let $\Phi = F\Phi$ and $\Phi \in L^*$; then $W^*\Phi \in L$ (the domain of A) and therefore there exists a sequence

$$\Phi_n' = \sum_{k=1}^{r_n} \alpha_k^n (f_k^n \times g_k^n) \longrightarrow W^*\Phi, \quad f_k^n \in L_1, \quad g_k^n \subset L_2, \quad n \longrightarrow \infty,$$

for which

$$H\Phi_n' = \sum_{k=1}^{r_n} \alpha_k^n (H_1 f_k^n \times H_2 g_k^n) \longrightarrow HW^*\Phi.$$

Putting $\varphi_k^n = W_1 f_k^n$, $\psi_k^n = W_2 g_k^n$, we easily find

$$\sum_{k=1}^{r_n} \alpha_k^n (\varphi_k^n \times \psi_k^n) \longrightarrow \Phi, \quad \varphi_k^n \in L_1^*, \quad \psi_k^n \in L_2^*$$

and

$$\sum_{k=1}^{r_n} \alpha_k^n (A_1 \varphi_k^n \times A_2 \psi_k^n) \longrightarrow HW^*\Phi.$$

This means that $(A_1^* \times A_2^*)\Phi$ exists and $= HW^*\Phi = A^*\Phi$. If now Φ is arbitrary and $\in L^*$, then $F\Phi \in L^*$ (since F reduces $\sqrt{AA^*}$) and $(1-F)\Phi \in \mathfrak{N}^*$, so that $A^*(1-F)\Phi = 0$. Since

$$\mathfrak{N}^* = \mathfrak{N}_1^* \times \mathfrak{H}_2 \oplus (\mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{N}_1^*) \times \mathfrak{N}_2,$$

$A_1^* \times A_2^* = 0$ on $\mathfrak{N}^*$; hence $(A_1^* \times A_2^*)(1-F)\Phi = 0$. Now we have

$$(A_1^* \times A_2^*) F\Phi \text{ exists and } = A^*F\Phi = A^*\Phi,$$

$$(A_1^* \times A_2^*)(1-F)\Phi \text{ exists and } = 0;$$

hence

$$(A_1^* \times A_2^*)\Phi \quad \text{exists} \quad \text{and} = A^*\Phi,$$

i. e.,

$$A^* \subset A_1^* \times A_2^*. \tag{8}$$

On the other hand, since for $f \in L_1^*$, $g \in L_2^*$,

$$(A_1^* \times A_2^*)(f \times g) = (H_1 W_1^* f) \times (H_2 W_2^* g) = A^*(f \times g),$$

and A^* is closed, we have $A_1^* \times A_2^* \subset A^*$, so that

$$A_1^* \times A_2^* = A^* = (A_1 \times A_2)^*.$$

The equations (6) are immediate corollaries of (5). To prove (7) we observe that $E_1^{(1)}(\lambda)$ and $W_2^{(2)}$ and therefore $H_1^{(1)}$ and $W_2^{(2)}$, are permutable, i. e., $W_2^{(2)} H_1^{(1)} \subset H_1^{(1)} W_2^{(2)}$. Hence

$$A_1 \times A_2 = W_1^{(1)} W_2^{(2)} H_1^{(1)} H_2^{(2)} \subset W_1^{(1)} H_1^{(1)} W_2^{(2)} H_2^{(2)} = A_1^{(1)} A_2^{(2)} \tag{9}$$

and similarly

$$A_1 \times A_2 \subset A_2^{(2)} A_1^{(1)}. \tag{10}$$

Using (10) for A_1^*, A_2^* and taking * of both sides, we obtain

$$(A_1^* \times A_2^*)^* \supset (A_2^{*(2)} \cdot A_1^{*(1)})^* = (A_2^{(2)*} \cdot A_1^{(1)*})^* \supset A_1^{(1)} A_2^{(2)},$$

or

$$A_1 \times A_2 \supset A_1^{(1)} A_2^{(2)}. \tag{11}$$

Together with (9) this gives $A_1 \times A_2 = A_1^{(1)} A_2^{(2)}$, and similarly $A_1 \times A_2 = A_2^{(2)} A_1^{(1)}$.

Corollary 1. *If H_1, H_2 are symmetric, then $H_1 \times H_2$ is also symmetric.*

Since H_1, H_2 are symmetric, $H_1^* \supset H_1$, $H_2^* \supset H_2$, and therefore

$$(H_1 \times H_2)^* = H_1^* \times H_2^* \supset H_1 \times H_2.$$

Corollary 2. *If A_1, A_2 are N-operators in $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, then*

$$(A_1^{(1)} A_2^{(2)})^* = A_1^{(1)*} \cdot A_2^{(2)*}.$$

This follows immediately from

$$(A_1^{(1)} A_2^{(2)})^* = (A_1 \times A_2)^* = A_1^* \times A_2^* = A_1^{*(1)} \cdot A_2^{*(2)} = A_1^{(1)*} \cdot A_2^{(2)*}.$$

§ 4. The deficiency-index of the direct product of symmetric operators

THEOREM 7. *If H_1, H_2 are symmetric, but not self-adjoint operators in $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, then the deficiency-index of $H = H_1 \times H_2$ is (∞, ∞).*

Proof. Denote by (m_1, n_1), (m_2, n_2) the deficiency-indices of H_1, H_2. Since H_1, H_2 are not self-adjoint, $m_1 + n_1 \neq 0$, $m_2 + n_2 \neq 0$, and without loss of generality we may suppose that $m_1 > 0$, $m_2 > 0$.

Let $\mathfrak{N}_\alpha^{(1)}$, $\mathfrak{N}_\alpha^{(2)}$, $\mathfrak{N}_\alpha$ be the manifolds satisfying

$$H_1^* f = \alpha f, \; H_2^* g = \alpha g, \quad H^* \Phi = \alpha \Phi \;\; \text{resp.} \tag{1}$$

Since for $J(\alpha) > 0$, $\dim \mathfrak{N}_\alpha^{(1)} = m_1 \neq 0$, $\dim \mathfrak{N}_\alpha^{(2)} = m_2 \neq 0$, there exist for such α f_α, $g_\alpha \neq 0$ satisfying (1). Now we take n different numbers

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \; R(\alpha_k) < 0, \; J(\alpha_k) > 0,$$

and put $\beta_k = -\frac{i}{\alpha_k}$. Then $J(\beta_k) > 0$, so that f_{α_k}, $g_{\beta_k} \neq 0$ exist. But since

$$H^*(f_{\alpha_k} \times g_{\beta_k}) = H_1^* f_{\alpha_k} \times H_2^* g_{\beta_k} = \alpha_k \beta_k (f_{\alpha_k} \times g_{\beta_k}) = -i (f_{\alpha_k} \times g_{\beta_k}),$$

$f_{\alpha_k} \times g_{\beta_k} \in \mathfrak{N}_{-i}$. Further, since the α_k are different, f_{α_k} are linearly independent. Therefore from $\sum_{k=1}^{n} c_k (f_{\alpha_k} \times g_{\beta_k}) = 0$ it follows for $f \in \mathfrak{H}_1$, $g \in \mathfrak{H}_2$,

$$0 = \Big(\sum_{k=1}^{n} c_k (f_{\alpha_k} \times g_{\beta_k}),\; f \times g \Big) = \Big(\sum_{k=1}^{n} c_k (g_{\beta_k}, g) f_{\alpha_k},\; f \Big),$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k (g_{\beta_k}, g) f_{\alpha_k} = 0, \; c_k (g_{\beta_k}, g) = 0, \; c_k = 0,$$

so that the $f_{\alpha_k} \times g_{\beta_k}$ are linearly independent. Since n is arbitrary, $\dim \mathfrak{N}_{-i} = \infty$. In the same manner we prove that $\dim \mathfrak{N}_i = \infty$.

LEMMA 3. *Let A_1 be an N-operator in $\mathfrak{H}_1$; then λ is a characteristic value of A_1, if and only if λ is a characteristic value of $A_1^{(1)}$. The corresponding characteristic manifolds $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_1^{(1)}$ of A_1, $A_1^{(1)}$ are connected by*

$$\mathfrak{M}_1^{(1)} = \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{H}_2. \tag{2}$$

Proof. Denote by $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_1^{(1)}$ the sets of vectors satisfying

$$A_1 f = \lambda f, \; A_1^{(1)} \Phi = \lambda \Phi \text{ resp.}$$

(the cases $\mathfrak{M}_1 = (0)$, $\mathfrak{M}_1^{(1)} = (0)$ are not excluded). If $f \in \mathfrak{M}_1$, $g \in \mathfrak{H}_2$,

$$A_1^{(1)} (f \times g) = (A_1 f) \times g = \lambda (f \times g),$$

so that $(f \times g) \in \mathfrak{M}_1^{(1)}$ and therefore

$$\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{H}_2 \subset \mathfrak{M}_1^{(1)}. \tag{3}$$

Since $\mathfrak{M}_1^{(1)} \perp$ range $(A_1^{(1)*} - \bar{\lambda} 1)$,

$$\mathfrak{M}_1^{(1)} \perp [A_1^{(1)*} (f \times g) - \bar{\lambda} (f \times g)] = (A_1^* f - \bar{\lambda} f) \times g, \; f \in L_1^*, \; g \in \mathfrak{H}_2.$$

Hence $\mathfrak{M}_1^{(1)} \perp R_{\bar{\lambda}}^* \times \mathfrak{H}_2$, where $R_{\bar{\lambda}}^*$ is the closure of the range of $(A_1^* - \bar{\lambda} 1)$, i. e.,

$$\mathfrak{M}_1^{(1)} \subset (\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2) \ominus (R_{\bar{\lambda}}^* \times \mathfrak{H}_2) = (\mathfrak{H}_1 \ominus R_{\bar{\lambda}}^*) \times \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{H}_2. \tag{4}$$

Combining (3) and (4) we obtain (2).

Corollary 1. *If H_1 is a symmetric operator and $\mathfrak{N}_i$, $\mathfrak{N}_{-i}$ are its deficiency-manifolds (i. e., the caracteristic manifolds of H_1^* corresponding to i and $-i$), then the deficiency-manifolds of $H_1^{(1)}$ are*

$$\mathfrak{N}_i^{(1)} = \mathfrak{N}_i \times \mathfrak{H}_2, \quad \mathfrak{N}_{-i}^{(1)} = \mathfrak{N}_{-i} \times \mathfrak{H}_2. \tag{5}$$

This follows immediately from lemma 3 and $H_1^{(1)*} = H_1^{*(1)}$.

Corollary 2. *If H_1 is a symmetric operator, (m, n) its deficiency-index, and p the dimension-number of $\mathfrak{H}_2$, then the deficiency-index of $H_1^{(1)}$ is (mp, np).*

THEOREM 8. *Let H_1 be a symmetric, but not self-adjoint operator, H_2 a self-adjoint operator, $E_2(\lambda)$ the resolution of the identity of H_2*

$$E_2(-0) = \lim_{\lambda \to -0} E_2(\lambda), \quad E_2(+0) = \lim_{\lambda \to +0} E_2(\lambda),$$

$$\mathfrak{M}_2^+ = \left(1 - E_2(+0)\right) \mathfrak{H}_2, \quad \mathfrak{M}_2^- = E_2(-0)\, \mathfrak{H}_2;$$

p_2^+, p_2^- the dimension numbers of $\mathfrak{M}_2^+$, $\mathfrak{M}_2^-$; (m_1, n_1) the deficiency-index of H_1. Then the deficiency-index (m, n) of $H_1 \times H_2$ is given by

$$m = m_1 p_2^+ + n_1 p_2^-, \quad n = m_1 p_2^- + n_1 p_2^+. \tag{6}$$

Proof. We can prove (6) under the assumption that

$$p_2^+ > 0, \; p_2^- = 0, \quad E_2(+0) - E_2(-0) = 0, \tag{7}$$

i. e., that in this case

$$m = m_1 p_2^+, \quad n = n_1 p_2^+. \tag{8}$$

The general case can be easily reduced to (7) by representing $\mathfrak{H}_2$ as a direct sum of mutually orthogonal subspaces

$$\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{M}_2^+ \oplus \mathfrak{M}_2^- \oplus \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{N} = (E_2(+0) - E_2(-0))\, \mathfrak{H}_2$$

reducing H_2, and by multiplying H_2 in $\mathfrak{M}_2^-$ by -1. Returning to the case (7), we see that if $m_1 = 0$, then $m = 0$. Otherwise there exists a vector $\Phi \neq 0$ such that

$$(H_1 \times H_2)^* \Phi = i\Phi, \text{ or } H_1^{(1)*} H_2^{(2)} \Phi = H_2^{(2)} H_1^{(1)*} \Phi = i\Phi, \tag{9}$$

and therefore

$$(H_1^{(1)*} H_2^{(2)} \Phi, H_2^{(2)} \Phi) = i\,(\Phi, H_2^{(2)} \Phi).$$

Since $(\Phi, H_2^{(2)} \Phi) > 0$ (see (7)), this means that $H_2^{(2)} \Phi$ is in the $+$-class of $H_1^{(1)}$; but that is impossible, the $+$-class of $H_1^{(1)*}$ being void (see corollary 2, § 4).

If $m_1 > 0$, we consider the following cases:

A. $p_2^+ = \infty$, i. e., the dimension number of $\mathfrak{M}_2^+ = \mathfrak{H}_2$ is ∞. Let $g_1, \ldots, g_n$ be any linearly-independent elements in L_2 (the domain of H_2), and $f \neq 0$ an element satisfying $H_1^{(1)*} f = if$. Then every linear combination $\Phi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (f \times g_k)$ of the linearly-independent $f \times g_k$, $k = 1, \ldots, n$, satisfies $H_1^{(1)*} \Phi = \Phi$; thus $\Phi \neq 0$ does not belong to $L_1^{(1)}$ (the domain of $H_1^{(1)}$) and therefore does not belong to L (the domain of $H_1 \times H_2 = H_2^{(2)} H_1^{(1)}$). But, on the other hand, $H_2^{(2)} \Phi$ exists, is $\neq 0$ for $\Phi \neq 0$, and

$$\left((H_1 \times H_2)^* \Phi, \; \Phi\right) = (H_2^{(2)} H_1^{(1)*} \Phi, \; \Phi) = i\,(H_2^{(2)} \Phi, \; \Phi).$$

Since $(H_2^{(2)} \Phi, \Phi) > 0$ this means that Φ belongs to the $+$-class of $H_1 \times H_2$. Thus for any n there exist n linearly-independent elements $f \times g_k$, such that every linear combination $(\neq 0)$ of them belongs to the $+$-class of $H_1 \times H_2$ but does not belong to L. This means that the dimension number m (mod L) of the $+$-class of $H_1 \times H_2$ is ∞.

B. $p_2^+ < \infty$. Represent $\mathfrak{H}_2$ as a direct sum of mutually orthogonal subspaces reducing H_2:

$$\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_{21} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{H}_{2q}, \quad q \leqslant p_2^+, \quad H_2 = \lambda_k 1 \text{ in } \mathfrak{H}_{2k}, \quad \lambda_k > 0,$$

and use corollary 2, § 4. So we have proved (8) for m; by replacing H_2 by $-H_2$ we obtain (8) for n.

Example. Denote by L_1, L_2, L the sets of functions $f(x)$, $g(y)$ representable as

$$f(x) = a + \int_0^x \varphi(\xi)\, d\xi, \quad g(y) = b + \int_0^y \psi(\eta)\, d\eta,$$

$$\Phi(x, y) = c + \int_0^x \varphi(\xi)\, d\xi + \int_0^y \psi(\eta)\, d\eta + \int_0^x \int_0^y \chi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$$0 \leqslant x, \quad y \leqslant 1,$$

where $\varphi(x)$, $\psi(y)$, $\chi(x, y)$ are Lebesgue square summable on $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant x, y \leqslant 1$ resp., and let M_1, M_2, M be the subsets of L_1, L_2, L defined by

$$f(0) = f(1) = 0, \; g(0) = g(1) = 0; \; \Phi(0, y) = \Phi(1, y) = \Phi(x, 0) = \Phi(x, 1) = 0.$$

We define the operators A_1, A_2, B_1, B_2, A, B by

$$A_1 f = i \frac{df}{dx} = i\varphi(x), \quad A_2 g = i \frac{dg}{dx} = i\psi(x), \quad A\Phi = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y} = \chi(x, y)$$

on L_1, L_2, L resp.

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2, \quad B = A \text{ on } M_1, M_2, M \text{ resp.}$$

Then B_1, B_2 are symmetric operators with the deficiency-indices (1, 1) and $B_1^* = A_1$, $B_2^* = A_2$; further, using integration by parts we find

$$B \subset A^*, \quad A \subset B^*.$$

Denote now by L', (M') the set of all linear combinations

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x) g_k(y), \; f_k \in L_1, \; g_k \in L_2 \quad (f_k \in M_1, \; g \in M_2);$$

then $M' \subset L' \subset L$, $M' \subset M$ and

$$A_1 \times A_2 = A = B^* \text{ on } L', \tag{10}$$

$$B_1 \times B_2 = B = A^* \text{ on } M'. \tag{11}$$

Since $A_1 \times A_2$, $B_1 \times B_2$ are the closures of the operators $(A_1 \times A_2)' = A_1 \times A_2$, $(B_1 \times B_2)' = B_1 \times B_2$ and defined only on L', M' resp.,

$$A_1 \times A_2 \subset B^*, \quad B_1 \times B_2 \subset A^*, \tag{12}$$

and

$$\times A_1 A_2 \subset \tilde{A}, \quad B_1 \times B_2 \subset \tilde{B}; \tag{13}$$

thus

$$(A_1 \times A_2)^* \supset B^{**}, \quad (B_1 \times B_2)^* \supset A^{**},$$

i. e.,

$$B_1 \times B_2 \supset \tilde{B}, \quad A_1 \times A_2 \supset \tilde{A}. \tag{14}$$

Combining (13) and (14) we find

$$A_1 \times A_2 = \tilde{A}, \quad B_1 \times B_2 = \tilde{B}; \tag{15}$$

thus $\tilde{B}$ is a symmetric operator with the deficiency-index (∞, ∞) and

$$\tilde{A}^* = A_1^* \times A_2^* = B_1 \times B_2 = \tilde{B}, \quad \tilde{B}^* = B_1^* \times B_2^* = A_1 \times A_2 = \tilde{A}. \tag{16}$$

Thus the notion of the direct product of operators can be used in the theory of partial differential operators. Further, some relations between the deficiency-spaces of H_1, H_2 and $H_1 \times H_2$ can be found. The author proposes to return to this subject in a further publication.

---

* Added in proof. As I have observed, theorem 4 and therefore the formula (12) in theorem 6 and corollary 2 will not be true in the general case. However they are true if the second factors on the right-hand side of (9) § 2 and (7) § 3 are bounded. Theorem 8 remains right, because $\mathfrak{H}_2$ can be represented as a direct sum of subspaces where H_1 is bounded.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

Ю. В. ЛИННИК

ОДНА ОБЩАЯ ТЕОРЕМА О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧИСЕЛ ОТДЕЛЬНЫМИ ТЕРНАРНЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе содержится доказательство теоремы о том, что всякое число, взаимно простое с удвоенным дискриминантом тройничной квадратичной положительной формы, представляемо этой формой, если это число делится на точный квадрат, превосходящий некоторую постоянную и если оно представляемо той же формой по модулю увосьмеренного дискриминанта.

§ 1

В этой работе доказывается следующая теорема. Пусть задана какая-нибудь положительная тернарная квадратичная целочисленная форма $\Phi(x, y, z)$, собственно примитивная и принадлежащая к нечетным взаимно простым инвариантам $[\Delta, \Omega]$.

ТЕОРЕМА. *Существует такая положительная константа* $c_1(\Omega, \Delta)$, *что если для какого-либо числа* M, *взаимно простого с* $2\Omega\Delta$, *разрешимо сравнение*

$$M \equiv \Phi(\xi, \eta, \zeta) \pmod{8\Delta\Omega} \qquad (1, 1)$$

и если, кроме того, M *делится на какой-либо квадратный множитель* q^2, *превышающий* $c_1(\Omega, \Delta)$, $M \equiv 0 \pmod{q^2}$, $q^2 > c_1(\Omega, \Delta)$, *то число* M *представляемо формой* $\Phi(x, y, z)$, $M = \Phi(x_1, y_1, z_1)$.

При доказательстве будем впредь называть числа M, удовлетворяющие (1, 1), конгруэнциально представляемыми формой $\Phi(x, y, z)$; числа, взаимно простые с $2\Omega\Delta$, будем называть неособенными.

§ 2

Наряду с формой $\Phi(x, y, z)$ будем рассматривать ее взаимную форму $f(x, y, z)$, принадлежащую к инвариантам $[\Omega, \Delta]$.

Известно, что если обозначим $\omega_1, \ldots, \omega_s$ все различные простые делители Ω, а $\delta_1, \ldots, \delta_t$ все различные простые делители Δ, то род, к которому принадлежат Φ и f, определится следующим образом. Если A — число, представляемое Φ и взаимно простое с $\Omega\Delta$ (оно может быть и четным), a — число (четное или нечетное), взаимно простое с $\Omega\Delta$ и представляемое f, то род задается совокупностью символов Лежандра

$$\left(\frac{A}{\delta_1}\right), \ldots, \left(\frac{A}{\delta_t}\right); \quad \left(\frac{a}{\omega_1}\right), \ldots, \left(\frac{a}{\omega_s}\right).$$

Теорема Eisenstein'а гласит, сверх того, что всегда существуют все 2^{t+s} возможных родов (1) *. В дальнейшем нам будет важен еще «simultaneous character» St. Smith'а, определяемый как

$$\Psi = (-1)^{\frac{\Omega M+1}{2} \cdot \frac{\Delta m+1}{2}},$$

где m и M — два неособенных числа, одновременно (simultaneously) представляемые f и Φ, так что

$$m = f(a_1, a_2, a_3); \quad M = \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3);$$
$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0.$$

Этот символ удовлетворяет равенству

$$\Psi = (-1)^{\frac{\Omega+1}{2} \cdot \frac{\Delta+1}{2}} \cdot \left(\frac{m}{\Omega}\right)\left(\frac{M}{\Delta}\right) \tag{1, 2}$$

и не является независимым характером.

§ 3

ЛЕММА. *Если неособенное число M конгруэнциально представляемо формой $\Phi(x, y, z)$, то существует некоторая форма $\overline{\Phi}(x, y, z)$, принадлежащая вместе со своей взаимной $\overline{f}(x, y, z)$ к роду, определяемому формами $\Phi(x, y, z)$ и $f(x, y, z)$, и примитивно представляющая число M:*

$$M = \overline{\Phi}(x, y, z).$$

При доказательстве используем эйзенштейново обоснование теоремы о родах и некоторые теоремы из мемуара St. Smith'а (1).

Пусть символы, определяющие род $\Phi(x, y, z)$, суть

$$\left(\frac{\Phi}{\delta_1}\right), \ldots, \left(\frac{\Phi}{\delta_t}\right); \quad \left(\frac{f}{\omega_1}\right), \ldots, \left(\frac{f}{\omega_s}\right).$$

Пусть каноническое разложение M есть $M = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$. Ввиду конгруэнциальной представляемости M формой Φ мы имеем, очевидно,

$$\left(\frac{\Phi}{\delta_1}\right) = \left(\frac{M}{\delta_1}\right), \ldots, \left(\frac{\Phi}{\delta_t}\right) = \left(\frac{M}{\delta_t}\right).$$

Рассмотрим несколько случаев:

1. Пусть $\Omega M \equiv 1 \pmod 4$. В этом случае доказательство почти совпадает с эйзенштейновым доказательством теоремы о родах.

Выбираем неособенное простое m с условиями **

$$\left(\frac{m}{\omega_1}\right) = \left(\frac{f}{\omega_1}\right), \ldots, \left(\frac{m}{\omega_s}\right) = \left(\frac{f}{\omega_s}\right) \tag{1, 3}$$

и совместимыми с ними условиями

$$\left(\frac{m}{p_1}\right) = \left(\frac{-\Delta}{p_1}\right), \ldots, \left(\frac{m}{p_k}\right) = \left(\frac{-\Delta}{p_k}\right) \tag{2, 3}$$

* См. литературу, указанную в конце статьи.
** Мы применяем здесь теорему Dirichlet о прогрессии.

и, сверх того, условно по mod 4,

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} = \left(\frac{f}{\Omega}\right) \cdot \left(\frac{-\Delta}{m}\right). \qquad (3,3)$$

Тогда в виду $\Omega M \equiv 1 \pmod 4$ [(1, 3) и (2, 3)]

$$\left(\frac{\Omega M}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} = \left(\frac{-1}{m}\right); \quad \left(\frac{-\Omega M}{m}\right) = 1; \qquad (4,3)$$

откуда следует существование бинарной формы $\varphi(x, y) = mx^2 + 2nxy + ry^2$ детерминанта $-\Omega M$, представляемой собственно некоторой собственно примитивной формой $\bar{f}(x, y, z)$, взаимная с которой $\bar{\Phi}(x, y, z)$ примитивно представляет M. Формы $\bar{\Phi}$ и $\bar{f}$ суть искомые.

2. Пусть $\Omega M = -1$, a simultaneous character $\Psi = +1$. Тогда в силу (1, 2) имеем всегда

$$\left(\frac{f}{\Omega}\right) \cdot \left(\frac{\Phi}{\Delta}\right) = (-1)^{\frac{\Omega+1}{2} \cdot \frac{\Delta+1}{2}}.$$

Выберем простое m, удовлетворяющее условиям (1, 3) и (2, 3). В силу $\Omega M \equiv -1 \pmod 4$, имеем:

$$1 = (-1)^{\frac{\Omega M+1}{2} \cdot \frac{\Delta m+1}{2}}$$

(не надо думать, что это есть символ Ψ, ибо нет речи об одновременности представления m и M).

Отсюда

$$\left(\frac{f}{\Omega}\right) \cdot \left(\frac{\Phi}{\Delta}\right) = (-1)^{\frac{\Omega M+1}{2} \cdot \frac{\Delta m+1}{2} + \frac{\Omega+1}{2} \cdot \frac{\Delta+1}{2}}.$$

Отсюда, в силу (1, 3), (2, 3) и закона взаимности, находим после вычислений

$$\left(\frac{-\Omega M}{m}\right) = +1$$

и далее рассуждаем, как в предыдущем случае.

3. Пусть $\Omega M \equiv -1 \pmod 4$, a $\Psi = -1$. В этом случае, как доказывается в мемуаре St. Smith'a, $\Phi(x, y, z)$ не может представлять чисел M, для которых $\Omega M \equiv 7 \pmod 8$, а значит, в нашем случае будет непременно $\Omega M \equiv 3 \pmod 8$.

Если теперь

$$\left(\frac{f}{\Omega}\right) \cdot \left(\frac{-\Delta}{M}\right) = +1,$$

то выбираем простое m, удовлетворяющее (1, 3) и (2, 3). Тогда получится

$$\left(\frac{m}{\Omega M}\right) = 1; \quad \left(\frac{\Omega M}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} = \left(\frac{-1}{m}\right);$$
$$\left(\frac{-\Omega M}{m}\right) = +1,$$

и далее рассуждаем, как раньше.

Если же $\left(\frac{f}{\Omega}\right)\cdot\left(\frac{-\Delta}{M}\right)=-1$, то выбираем m простое и удовлетворяющее условиям

$$\left(\frac{m}{\omega_1}\right)=\left(\frac{2}{\omega_1}\right)\cdot\left(\frac{f}{\omega_1}\right),\ \ldots,\ \left(\frac{m}{\omega_s}\right)=\left(\frac{2}{\omega_s}\right)\cdot\left(\frac{f}{\omega_s}\right), \qquad (5, 3)$$

$$\left(\frac{m}{p_1}\right)=\left(\frac{2}{p_1}\right)\cdot\left(\frac{-\Delta}{p_1}\right),\ \ldots,\ \left(\frac{m}{p_k}\right)=\left(\frac{2}{p_k}\right)\left(\frac{-\Delta}{p_k}\right). \qquad (6, 3)$$

Тогда имеем

$$(-1)=\left(\frac{f}{\Omega}\right)\cdot\left(\frac{-\Delta}{M}\right)=\left(\frac{2m}{\Omega}\right)\cdot\left(\frac{2m}{M}\right)=\left(\frac{2}{\Omega M}\right)\cdot\left(\frac{m}{\Omega M}\right).$$

Но, в виду $\Omega M\equiv 3 \pmod 8$, $\left(\frac{2}{\Omega M}\right)=-1$. Следовательно, $\left(\frac{m}{\Omega M}\right)=$ $=\left(\frac{-\Omega M}{m}\right)=+1$. Существует нечетное n такое, что $-\Omega M=n^2-mr$, значит, $r\equiv 0 \pmod 4$.

Полагая $r=4r'$, найдем: $-\Omega M=n^2-2m\cdot 2r'$.

Несобственно примитивная форма $2mx^2+2nxy+2r'y^2$ имеет детерминант $-\Omega M$ и представляется некоторой формой $\bar{f}(x, y, z)$, у которой, как легко видеть, коэффициент при z^2 нечетен. Это собственно примитивная форма; взаимная с ней $\bar{\Phi}(x, y, z)$ собственно примитивна и собственно представляет M. В силу (5, 3) и (6, 3) формы $\bar{\Phi}$ и $\bar{f}$ суть искомые.

Лемма доказана полностью.

§ 4

Основываясь на предыдущем результате, докажем следующую теорему:

ТЕОРЕМА. *Для любого рода тернарных положительных собственно примитивных форм, представители которого суть форма $\Phi(x, y, z)$ и ее взаимная $f(x, y, z)$, можно указать константу рода — неособенное число $\varkappa$ такое, что если какое-либо неособенное число M конгруэнциально представляемо одной из форм рода $\Phi(x, y, z)$, то число $M\varkappa^2$ представляемо всеми формами рода.*

Пусть M неособенное число, конгруэнциально представляемое $\Phi(x, y, z)$. Подыщем по § 3 в том же роде форму $\bar{\Phi}(x, y, z)$, представляющую M. Пусть $\Phi_1(x, y, z), \ldots, \Phi_s(x, y, z)$ — все формы нашего рода и $\bar{\Phi}(x, y, z)=\Phi_j(x, y, z)$.

В силу теоремы, доказанной St. Smith'ом (¹), любую из этих форм можно преобразовать в любую другую из них же унимодулярной подстановкой, коэффициенты которой суть рациональные дроби с неособенными знаменателями. Пусть S_i такая подстановка, переводящая $\Phi_i(x, y, z)$ в $\Phi_1(x, y, z)$:

$$S_i=\begin{pmatrix} \frac{\alpha_{1i}}{r_i} & \frac{\alpha_{2i}}{r_i} & \frac{\alpha_{3i}}{r_i} \\ \frac{\beta_{1i}}{r_i} & \frac{\beta_{2i}}{r_i} & \frac{\beta_{3i}}{r_i} \\ \frac{\gamma_{1i}}{r_i} & \frac{\gamma_{2i}}{r_i} & \frac{\gamma_{3i}}{r_i} \end{pmatrix}; \qquad |S_i|=1,$$

$\alpha_{1i}, \ldots, \gamma_{3i}$ — целые, r_i — неособенное; дроби могут быть и сократимыми.

Тогда от формы Φ_i можно перейти к форме Φ_j подстановкой $S_i S_j^{-1}$, которую можно записать с коэффициентами в виде дробей со знаменателями $r_i r_j^2$; следовательно, от любой формы наверное возможно перейти к другой подстановкой, знаменатели которой все равны

$$r_1^2 r_2^2 \ldots r_s^2 = \prod_{k=1}^{s} r_k^2 = w.$$

Мы имеем далее

$$M = \overline{\Phi}(x, y, z) = \Phi_j(x, y, z).$$

Отсюда

$$Mw^2 = \Phi_j(xw, yw, zw).$$

Имеем теперь

$$\Phi_j(\xi, \eta, \zeta) = \Phi_i(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta,\ \alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta,\ \alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta),$$

где $\alpha, \beta, \ldots, \gamma''$ — дроби со знаменателем w. Полагаем

$$\xi = xw, \quad \eta = yw, \quad \zeta = zw;$$
$$x' = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta; \quad y' = \alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta; \quad z' = \alpha''\xi + \beta''\eta + z''\zeta.$$

Это — целые числа. Имеем:

$$Mw^2 = \Phi_i(x', y', z'),$$

т. е. Mw^2 представляется всеми формами рода. Однако здесь не гарантируется примитивность представления.

§ 5

Нам придется повторить доказательство теоремы St. Smith'а, значительно усилив требования, предъявляемые им к числам r_i — знаменателям подстановок преобразования. St. Smith требует от них только неособенности, мы же поставим следующее требование: зададим некоторую положительную константу c_2, которую уточним в дальнейшем, и постараемся выбрать все r_i ($i = 1, 2, \ldots, s$) так, чтобы они состояли только из простых множителей p_i (разных или одинаковых), таких, что

1) p_i — неособенно,
2) $p_i > c_2$,
3) p_i — квадратичный вычет Ω, т. е.

$$\left(\frac{p_i}{\omega_e}\right) = +1 \quad \text{при} \quad \omega_e \mid \Omega.$$

Мы суживаем рассматриваемое множество форм по сравнению со St. Smith'ом, ибо у нас инварианты Ω и Δ взаимно просты. St. Smith начинает с того, что если $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ — бинарные примитивные собственно формы одного детерминанта и рода, то из разрешимости уравнения $\varphi_1(x, y) = M$ вытекает разрешимость уравнения $\varphi_2(x, y) = Mz^2$, где z взаимно просто с любым заданным k. Это доказывается

на основании теоремы Гаусса об удвоении классов. Если K_1 и K_2 — соответственно классы φ_1 и φ_2, то

$$K_1 = K_2 \cdot K^2.$$

Заметим здесь же, что если A — любой амбиговый класс того же детерминанта, то $K_1 = K_2 \cdot (KA)^2$.

Пусть f_1 и f_2 положительные формы одного рода взаимно простых инвариантов $[\Omega, \Delta]$.

Выбираем число M_1 следующим образом. Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_{\varphi(\Omega)}$ — представители классов вычетов $\bmod \Omega$, взаимно простых с Ω, которые и сами между собой попарно взаимно просты. M_1 должно удовлетворять таким условиям:

1) $M_1 = \Phi_1(x_1, y_1, z_1)$ представляемо формой, взаимной с $f_1(x, y, z)$;

2) $M_1 \equiv 0 \pmod{P_1 P_2 \ldots P_{\varphi(\Omega)}}$, но

$$\left(\frac{M_1}{P_i}, P_i\right) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, \varphi(\Omega));$$

3) вычет $M_1 \bmod 8$ таков, что одновременно с ним (в смысле St. Smith'a) могут представиться формой $f_1(x, y, z)$ нечетные числа (M_1, разумеется, неособенное).

Покажем, что такое M_1 выбрать возможно.

Пусть $p_1^s, \ldots, s > 0$ — наивысшая степень простого числа p_1, делящая P_1. Сравнение $\Phi_1(x, y, z) \equiv 0 \pmod{p_1^s}$ всегда разрешимо в x, y, z, не одновременно сравнимых с $0 \pmod{p_1}$.

Известно, что это возможно при $s = 1$, если $p_1 \nmid 2\Omega\Delta$, что и имеет место у нас. Выбрав ξ, η, ζ так, что $\Phi_1(\xi, \eta, \zeta) \equiv 0 \pmod{p_1^{s-1}}$, ξ, η, ζ не одновременно $\equiv 0 \pmod{p_1}$, получим при любых x, y, z

$$\Phi_1(\xi + p_1^{s-1}x, \eta + p_1^{s-1}y, \zeta + p_1^{s-1}z) \equiv \Phi_1(\xi, \eta, \zeta) + \\ + p_1^{s-1}\left\{\frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi} \cdot x + \frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta} \cdot y + \frac{\partial\Phi_1}{\partial\zeta} \cdot z\right\} \pmod{p_1^{2(s-1)}}.$$

Выберем x', y', z' так, чтобы выражение слева делилось на p_1^s, но не на p_1^{s+1}. Это возможно, иначе

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi} \equiv \frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta} \equiv \frac{\partial\Phi_1}{\partial\zeta} \equiv 0 \pmod{p_1} \quad \text{и} \quad p_1 \nmid 2\Omega\Delta,$$

что невозможно. Точно так же поступаем для всех простых делителей P_1, затем $P_2, \ldots, P_{\varphi(\Omega)}$ и, наконец, выбираем x', y', z' нужным образом по $\bmod 8$, так что в результате можем взять $M = \Phi_1(x', y', z')$. Это число должно быть ноособенным.

Совершенно аналогично выбираем M_2 для формы $\Phi_2(x, y, z)$, причем должно быть $M_1 \equiv M_2 \pmod 8$, что возможно, так как Φ_1 и Φ_2 одного рода. Пусть теперь $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ — две собственно примитивные бинарные формы детерминантов $-\Omega M_1$ и $-\Omega M_2$, представляемые соответственно f_1 и f_2 собственно и союзно с представлениями $M_1 = \Phi_1(x', y', z')$, $M_2 = \Phi_2(x'', y'', z'')$. Существование их следует из условий 1), 2), 3), наложенных на M_1 и M_2.

Характеры $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ по простым числам $\omega_i \mid \Omega$ совпадают, так как f_1 и f_2 одного рода. Их характеры по mod 4 совпадают, если они существуют. Далее, если простое число μ делит M_1 и M_2, то

$$\left(\frac{\varphi_1}{\mu}\right) = \left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) = \left(\frac{\varphi_2}{\mu}\right).$$

Остальные же характеры φ_1 и φ_2 относятся к разным простым числам. Числа, имеющие характеры $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ по модулям, делящим $4\Omega M_1 M_2$, распределяются на арифметические прогрессии. Если m — такое число, то, в силу свойств характеров,

$$\left(\frac{-\Omega M_1}{m}\right) = \left(\frac{-\Omega M_2}{m}\right) = +1.$$

Применяя теорему Dirichlet о прогрессии, выберем $m = p$ простым и неособенным. Тогда числа $-\Omega M_1$ и $-\Omega M_2$ — квадратичные вычеты p, и существуют бинарные формы $\xi_1(x, y)$ и $\xi_2(x, y)$ детерминантов $-\Omega M_1$ и $-\Omega M_2$, собственно примитивные и представляющие p.

Если Ξ_1 — класс ξ_1, Ξ_2 — класс ξ_2, а K_1 и K_2 — классы φ_1 и φ_2, то существуют классы C_1 и C_2 детерминантов $-\Omega M_1$ и $-\Omega M_2$ такие, что

$$K_1 = \Xi_1 C_1^2; \quad K_2 = \Xi_2 C_2^2. \qquad (1, 5)$$

Пусть характеры C_1 по простым делителям Ω суть $\left(\frac{C_1}{\omega_1}\right), \ldots, \left(\frac{C_1}{\omega_s}\right)$. Из чисел $P_1, \ldots, P_{\varphi(\Omega)}$ выберем P_k так, чтобы

$$\left(\frac{P_k}{\omega_i}\right) = \left(\frac{C_1}{\omega_i}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, s), \qquad (2, 5)$$

и составим амбиговый класс A_1 детерминанта $-\Omega M_1$, представляемый формой $P_k x^2 + \frac{\Omega M_1}{P_k} y^2$, собственно примитивной в силу условий для M_1. Имеем в силу (2, 5)

$$\left(\frac{A_1 C_1}{\omega_i}\right) = +1 \quad (i = 1, 2, \ldots, s). \qquad (3, 5)$$

Известно, что всякая собственно примитивная бинарная форма представляет бесконечно много простых чисел. Применим эту теорему к классу $A_1 C_1$ и выберем из представляемых им чисел такое неособенное простое число θ_1, которое $> c_2$ и, сверх того, таково, что при композиции класса $\Xi_1 \cdot (A_1 C_1)^2 = K_1$ можно взять за первые коэффициенты Ξ_1 и $(A_1 C_1)^2$ соответственно p и θ_1^2. Тогда получим:

$$p\theta_1^2 = \varphi_1(x', y'), \quad \theta_1 > c_2,$$

θ_1 — квадратичный вычет Ω.

Совершенно аналогично подбираем простое неособенное θ_2 так, что

$$p\theta_2^2 = \varphi_2(x'', y''), \quad \theta_2 > \theta_1 > c_2,$$

θ_2 — квадратичный вычет Ω.

Теперь возьмем бинарные собственно примитивные формы $\Psi_1(Y, Z)$ и $\Psi_2(Y, Z)$, представляемые соответственно формами $\Phi_1(x, y, z)$

и $\Phi_2(x, y, z)$ собственно и союзно с представлениями $p\theta_1^2$ и $p\theta_2^2$ соответственно $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$. Существование их является тривиальным фактом в виду условий для M_1 и M_2. Их детерминанты суть соответственно $-\Delta p\theta_1^2$ и $-\Delta p\theta_2^2$. Имеем $\left(\frac{\Psi_1}{\delta}\right)=\left(\frac{\Psi_2}{\delta}\right)$ для всех $\delta \mid \Delta$ в силу одинаковости родов $\Phi_1(x, y, z)$ и $\Phi_2(x, y, z)$, и $\left(\frac{\Psi_1}{p}\right)=\left(\frac{-\Omega}{p}\right)=\left(\frac{\Psi_2}{p}\right)$. Поэтому возможно избрать простое P', представляемое двумя классами, принадлежащими к родам форм Ψ_1 и соответственно Ψ_2, так что если L_1 есть класс Ψ_1, L_2 — класс Ψ_2, то найдутся классы M_1 и D_1 детерминанта $-\Delta p\theta_1^2$ и классы M_2 и D_2 детерминанта $-\Delta p\theta_2^2$ такие, что $L_1=M_1D_1^2$; $L_2=M_2D_2^2$ и M_1 и M_2 представляют P'.

Докажем следующую лемму:

ЛЕММА. *Всякая собственно примитивная бинарная форма*

$$ax^2+2bxy+cy^2$$

детерминанта n представляет бесконечно много простых чисел, которые все суть квадратичные вычеты любого наперед заданного числа Ω, *взаимно простого с* $2n$.

Для доказательства рассмотрим форму

$$a(\alpha\Omega t+\beta u)^2+2b(\alpha\Omega t+\beta u)(\gamma\Omega t+\delta u)+c(\gamma\Omega t+\delta u)^2,$$

где числа α, β, γ, δ подобраны так, что 1) $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix} \neq 0$, 2) рассматриваемая форма собственно примитивна, 3) число $a\beta^2+2b\beta\delta+c\delta^2$ есть квадратичный вычет Ω. Возможность выполнения всех этих трех условий очевидна. Эта форма представляет бесконечно много простых чисел; каждое из них по модулю Ω сравнимо с $(a\beta^2+2b\beta\delta+c\delta^2)u^2$, т. е. есть квадратичный вычет Ω. Далее, наша форма очевидно содержится в форме $ax^2+2bxy+cy^2$. Лемма доказана.

В силу этой леммы, примененной к классам D_1 и D_2 и числу Ω, взаимно простому с их детерминантами, мы отыщем простые числа $\vartheta_1>c_2$ и $\vartheta_2>\vartheta_1>c_2$ такие, что

$$\Psi_1(Y', Z')=P\vartheta_1^2;\ \Psi_2(Y'', Z'')=P\vartheta_2^2;$$

ϑ_1 и ϑ_2 — неособенные простые числа $>c_2$ и являющиеся квадратичными вычетами Ω.

Пусть теперь

$$f_1(x, y, z)=a_1x^2+b_1y^2+c_1z^2+2d_1xy+2e_1xz+2g_1yz, \qquad (4, 5)$$
$$\Phi_1(x, y, z)=A_1x^2+B_1y^2+C_1z^2+2D_1xy+2E_1xz+2G_1yz \qquad (5, 5)$$

и обозначения для $f_2(x, y, z)$ и $\Phi_2(x, y, z)$ получаются заменой индекса 1 на 2.

В виду доказанного выше можно считать, что f_i и Φ_i $(i=1, 2)$ выбраны в своих классах так, что

$$a_i=p\theta_i^2;\ C_i=P\vartheta_i^2 \quad (i=1, 2).$$

В таком случае, как доказывается в мемуаре St. Smith'a, существует рациональная унимодулярная подстановка

$$S=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{pmatrix},$$

переводящая форму $f_1(x,y,z)$ в форму $f_2(x,y,z)$; коэффициенты S суть несократимые дроби, знаменатели которых не содержат других простых множителей, кроме θ_1, θ_2, ϑ_1, ϑ_2. Их можно привести к одному знаменателю, обладающему тем же свойством, если отбросить несократимость. Этим самым наше утверждение относительно чисел r_i, применяемых в § 4, доказано, ибо подстановка, союзная с подстановкой S, переводит $\Phi_1(x,y,z)$ в $\Phi_2(x,y,z)$.

§ 6

В дальнейшем будут применяться кватернарные гиперкомплексные числа—«эрмитионы», свойства и применение которых детально описаны в моей работе «On certain results relating to positive ternary quadratic forms». Введение их основано на тождестве [4,5]

$$[\xi^2+\Omega\Phi(x,y,z)]\cdot[\eta^2+\Omega\Phi(x_1,y_1,z_1)]=\zeta^2+\Omega\Phi(x_2,y_2,z_2),$$

где $\Phi(x,y,z)$ есть тернарная форма инвариантов $[\Delta,\Omega]$ со взаимной $f(x,y,z)$ и

$$\left.\begin{aligned}
&\zeta=\xi\eta-\frac{1}{2}\Omega\left(x\frac{\partial\Phi(x_1,y_1,z_1)}{\partial x_1}+y\frac{\partial\Phi(x_1,y_1,z_1)}{\partial y_1}+z\frac{\partial\Phi(x_1,y_1,z_1)}{\partial z_1}\right);\\
&x_2=\eta x+\xi x_1+\frac{1}{2}\frac{\partial f(s,s',s'')}{\partial s},\quad s=\begin{vmatrix}y & z\\ y_1 & z_1\end{vmatrix};\\
&y_2=\eta y+\xi y_1+\frac{1}{2}\frac{\partial f(s,s',s'')}{\partial s'},\quad s'=\begin{vmatrix}z & x\\ z_1 & x_1\end{vmatrix};\\
&z_2=\eta z+\xi z_1+\frac{1}{2}\frac{\partial f(s,s',s'')}{\partial s''},\quad s''=\begin{vmatrix}x & y\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}.
\end{aligned}\right\}\qquad(1,6)$$

Все правила умножения этих чисел, построенных присоединением к полю всех реальных чисел трех имажинарных единиц i_1, i_2, i_3, заключаются в равенстве

$$(\xi+xi_1+yi_2+zi_3)(\eta+x_1i_1+y_1i_2+z_1i_3)=\zeta+x_2i_1+y_2i_2+z_2i_3,$$

которое нужно рассматривать как тождество по ξ, x, y, z; η, x_1, y_1, z_1. Если $X=\xi+xi_1+yi_2+zi_3$, то определяем

$$\text{Real part }(X)=\xi;\ \overline{X}=2\xi-X;$$
$$N(X)=\xi^2+\Omega\Phi(x,y,z).$$

Имеем:

$$N(XY)=N(X)N(Y).$$

Далее

$$(XY)Z=X(YZ);\ X\overline{X}=N(X).$$

Если Real part $X=0$, то $N(X)=-X^2=\Omega\Phi(x,y,z)$.

Такие эрмитионы будем называть вырожденными. Мы будем заниматься только такими эрмитионами, у которых все четыре компонента

суть целые числа; они, очевидно, образуют кольцо. Если для трех целых эрмитионов P, Q, R имеет место соотношение $R = PQ$, то будем говорить, что R делится на P слева; аналогично — для деления справа. Если все четыре компонента эрмитиона имеют О. Н. Д. $= 1$, то он называется примитивным. В дальнейшем под словом «эрмитион» будем понимать целый эрмитион, порожденный взаимными формами $f(x, y, z)$ и $\Phi(x, y, z)$ взаимно простых инвариантов соответственно $[\Omega, \Delta]$ и $[\Delta, \Omega]$.

§ 7

Перейдем к доказательству о с н о в н о й леммы.

ЛЕММА. *Если M — примитивный эрмитион, норма которого делится на неособенное число r; $(r, 2\Omega\Delta) = 1$, а R — примитивный эрмитион нормы r; $N(R) = r$ (и, следовательно, r — квадратичный вычет Ω), то можно подыскать эрмитион S, норма которого неособенна и сравнима с любым наперед заданным вычетом по* mod $2r$ *и любым наперед заданным квадратичным вычетом по* mod Ω, *такой, что*

$$SM \equiv 0 \ (\text{mod } R \text{ слева}). \qquad (1,7)$$

Для доказательства заметим, что если положим $T = Y\bar{M} + R\bar{X}$, где X и Y — любые целые эрмитионы, то всегда будет

$$TM \equiv 0 \quad (\text{mod } R \text{ слева})$$

в виду $\bar{M}M = N(M) \equiv 0 \quad (\text{mod } R \text{ слева})$.

Далее, имеем:

$$N(T) = T\bar{T} \equiv 2 \text{ Real part } Y\bar{M}X\bar{R} \quad (\text{mod } r).$$

Пусть $r = q_1^{\alpha_1} \ldots q_t^{\alpha_t}$ — каноническое разложение r. Покажем, что возможно выбрать такое X, что эрмитион $\bar{M}X\bar{R}$ не будет делиться ни на одно из целых рациональных чисел q_i $(i = 1, \ldots, t)$.

Пусть это невозможно. Тогда различаем два случая:

1° При всех X, $MX\bar{R}$ делится на простое число q_i.

2° Нельзя указать $q_i | r$, на которое бы $\bar{M}X\bar{R}$ делилось при всех X, но при каждом X оно делится на один из делителей r. В этом случае пусть при $X = X_i$, $\bar{M}XR$ не делится на q_i $(i = 1, 2, \ldots, t)$. Выбирая $X \equiv X_i$ (mod q_i), $(i = 1, 2, \ldots, t)$, что, очевидно, возможно, получим противоречие. Значит, возможен только первый случай.

Полагая $X = 1$, найдем, что $\bar{M}R$ и, следовательно, при всех Z, MRZ делится на q_i; это же верно для эрмитиона

$$\bar{M}X\bar{R} + MRZ = \bar{M}(X\bar{R} + \bar{R}Z).$$

Теперь заметим, что не при всех X и Z число $N(X\bar{R} + \bar{R}Z) \equiv$ $\equiv 2$ Real part $XRZR$ делится на q_i. Иначе бы, очевидно, $R\bar{Z}\bar{R}$ всегда делилось на q_i и, следовательно, Ri_1R, Ri_2R и $\bar{R}i_3R$ всегда делились бы на q_i, что, как нетрудно усмотреть после вычислений, повело бы к непримитивности R. Это невозможно. Выберем поэтому X и Z так, чтобы

$N(X\overline{R}+\overline{R}Z)$ не делилось на q_i; пусть $X\overline{R}+\overline{R}Z=U$. Тогда $MU\equiv 0$ $(\operatorname{mod} q_i)$; $\overline{M}U\overline{U}=\overline{M}\cdot N(U)\equiv 0$ $(\operatorname{mod} q_i)$, откуда $\overline{M}\equiv 0$ $(\operatorname{mod} q_i)$, т. е. $\overline{M}$ — непримитивно, что невозможно.

Поэтому существует такое X, что $\overline{M}X\overline{R}$ не делится ни на одно из чисел q_i. Пусть при этом

$$\overline{M}X\overline{R}=\eta+x_1 i_1+y_1 i_2+z_1 i_3.$$

Тогда все четыре числа η, $\frac{1}{2}\Omega\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}$, $\frac{1}{2}\Omega\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}$, $\frac{1}{2}\Omega\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}$ не могут делиться на q_i $(i=1, 2, \ldots, t)$. Следовательно, очевидно, возможно выбрать $Y=\xi+x_1 i_1+y_1 i_2+z_1 i_3$ так, что

$$2 \text{ Real part } Y\overline{M}X\overline{R}=\xi\eta-\frac{1}{2}\Omega\left(x\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+y\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}+z\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}\right)$$

сравнимо с любым вычетом по модулю r. Беря, сверх того, $Y\equiv 0 \pmod{2\Omega}$, а X выбирая по модулю Ω, не зависимому от r, получим:

$$N(Y\overline{M}+RX)\equiv N(R)N(X) \pmod{\Omega},$$

т. е. нечетные числа, являющиеся любыми заданными квадратичными вычетами Ω. Таким образом, искомое S найдется в форме $Y\overline{M}+RX$. Можно показать, что это есть его единственно возможная форма, но мы на этом не останавливаемся.

§ 8

Если, при условиях § 7, $SM\equiv 0$ (mod R слева), то при любом целом рациональном α будет

$$\alpha SM\equiv 0 \quad (\operatorname{mod} R \text{ слева}).$$

Рассмотрим, выбрав какое-либо S с условием $(N(S), 2r\Omega\Delta)=1$, квадратичную форму $N(\alpha S+rX)$, полагая $S=s_0+s_1 i_1+s_2 i_2+s_3 i_3$, $X=\xi+x_1 i_1+y i_2+z i_3$. Тогда $N(\alpha S+rX)$ будет равна $\zeta^2+\Omega\Phi(x', y', z')$, где

$$\zeta=\alpha s_0+r\xi,\ x'=\alpha s_1+rx;\ y'=\alpha s_2+ry;\ z'=\alpha s_3+rz.$$

Это — квинтернарная форма нулевого детерминанта. Свяжем теперь переменное α с ξ, x, y, z, полагая

$$\alpha=\lambda\xi+\mu x+\nu y+\rho z.$$

Тогда получим

$$\left.\begin{aligned}\zeta&=(\lambda s_0+r)\xi+\mu s_0 x+\nu s_0 y+\rho s_0 z,\\ x'&=\lambda s_1\xi+(\mu s_1+r)x+\nu s_1 y+\rho s_1 z,\\ y'&=\lambda s_2\xi+\mu s_2 x+(\nu s_2+r)y+\rho s_2 z,\\ z'&=\lambda s_3\xi+\mu s_3 x+\nu s_3 y+(\rho s_3+r)z.\end{aligned}\right\} \qquad (1,8)$$

Получится кватернарная форма, содержащаяся в форме $\zeta^2+\Omega\Phi(x', y', z')$.

Ее детерминант равен поэтому детерминанту этой последней формы $\Omega^4\Delta^2$, умноженному на квадрат детерминанта

$$D(r) = \begin{vmatrix} \lambda s_0 + r & \mu s_0 & \nu s_0 & \rho s_0 \\ \lambda s_1 & \mu s_1 + r & \nu s_1 & \rho s_1 \\ \lambda s_2 & \mu s_2 & \nu s_2 + r & \rho s_2 \\ \lambda s_3 & \mu s_3 & \nu s_3 & \rho s_3 + r \end{vmatrix}$$

$D(r)$ можно рассматривать как характеристический полином матрицы $\| D(0) \|$:

$$D(r) = r^4 + \sigma_1 r^3 + \sigma_2 r^2 + \sigma_3 r + \sigma_4,$$

причем, как известно, σ_i здесь есть сумма всех главных миноров $\| D(0) \|$ i-того порядка. Но в нашем случае все главные миноры порядка выше 1-го равны нулю в виду пропорциональности колонн, так что получаем

$$D(r) = r^4 + r^3 (\lambda s_0 + \mu s_1 + \nu s_2 + \rho s_3).$$

Нашей целью теперь будет подбор таких λ, μ, ν, ρ, при которых $D(r) = r^5$, и которые, кроме того, имеют О. Н. Д. взаимно простой с r.

Мы можем считать S примитивным эрмитионом, так что $(s_0, s_1, s_2, s_3) = 1$. Если одно из чисел s_0, s_1, s_2, s_3 равно нулю, например s_0, то можем положить $\lambda = 1$, а затем, в виду $(s_1, s_2, s_3) = 1$, определить μ, ν, ρ так, чтобы $\mu s_1 + \nu s_2 + \rho s_3 = r(r-1)$, чем наша цель и будет достигнута.

Пусть теперь ни одно из s_i не равно нулю. Заметим, что, заменяя S на $S + rT$, можно, не меняя вычета $N(S)$ по r, добиться того, чтобы простые делители r не входили ни в одно из чисел s_0, s_1, s_2, s_3 в степени высшей, чем они входят в r, и сверх того, (s_0, s_1, s_2) делил бы r. Пусть это уже достигнуто. Пусть О. Н. Д. чисел s_0, s_1, s_2 есть $\delta \mid r$. Тогда $(\delta, s_3) = 1$. Пусть $\delta = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ — каноническое разложение δ, причем пусть число $\frac{r}{\delta}$ делится на числа $p_1, \dots, p_l$ и не делится на числа $p_{l+1}, \dots, p_n$. Определяем число ρ' под условиями

$$\rho' \equiv 1 \pmod{p_1}, \dots, \rho' = 1 \pmod{p_l}; \; \rho' \equiv 1 \pmod{r-1},$$
$$\rho' \equiv 0 \pmod{p_{l+1}}, \dots, \rho' \equiv 0 \pmod{p_n};$$

$$\left(\rho', \frac{r}{\delta}\right) = 1,$$

что возможно, и берем $\rho = -\rho'\delta$. Теперь подыщем такие λ, μ, ν, что, полагая $\frac{s_0}{\delta} = s_0'$, $\frac{s_1}{\delta} = s_1'$, $\frac{s_2}{\delta} = s_2'$, найдем:

$$\lambda s_0' + \mu s_1' + \nu s_2' = \frac{r}{\delta}(r-1) + \rho' s_3 = t.$$

Мы имеем

$$(s_0', s_1', s_2') = 1; \; (s_3, \delta) = 1.$$

Число t будет, по определению ρ', взаимно просто с $\rho'\delta$. Подбирая числа λ', μ', ν' такие, что $\lambda' s_0' + \mu' s_1' + \nu' s_2' = 1$, и беря $\lambda'' = \lambda' t$; $\mu'' = \mu' t$; $\nu'' = \nu' t$, имеем, очевидно, $(\lambda'', \mu'', \nu'') = t$ и $(\lambda'', \mu'', \nu'', \rho'\delta) = 1$.

Если теперь взять $\lambda=\lambda''$, $\mu=\mu''$, $\nu=\nu''$, $\rho=\pm\rho'\delta$, то эти четыре числа будут иметь О. Н. Д. $=1$ и $D(r)$ будет r^5.

Пусть теперь λ, μ, ν, ρ фиксированы указанными условиями. Кватернарная форма $N(\alpha S+rX)$ по модулю r сравнима с $N(\alpha S)=\alpha^2 N(S)$. Имеем

$$\alpha=\lambda\xi+\mu x+\nu y+\rho z;\ \ X=\xi+xi_1+yi_2+zi_3.$$

В виду $(\lambda, \mu, \nu, \rho)=1$ можно придать ξ, x, y, z такие значения, что $\alpha=1$ и тогда

$$N(\alpha S+rX)\equiv N(S) \pmod r.$$

Что же касается модулей взаимно простых с $r\Omega\Delta$, то наша форма $N(\alpha S+rX)$ может быть сравнима с любым вычетом любого из них. Действительно, каковы бы ни были числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и каково бы ни было число n взаимно простое с $r\Omega\Delta$ (например, $n=2^s$), система сравнений

$$\zeta\equiv\alpha,\ x'\equiv\beta,\ y'\equiv\gamma,\ z'\equiv\delta \pmod n,$$

ге ζ, x', y', z' взяты из (1,8), разрешима, так как ее детерминант равен r^5. Далее, как нетрудно доказать, $\zeta^2+\Omega\Phi(x', y', z')$, где ζ, x', y', z' — любые целые, представляет по модулю Ω все его квадратичные вычеты, по модулям отдельных делителей числа Δ — все числа, кроме может быть нуля, а по модулям, взаимно простым с $\Omega\Delta$, — все числа без всякого исключения. В итоге можно сказать, присоединяя сюда результаты § 7, что S и затем λ, μ, ν, ρ можно выбрать таким образом по заданному M, что $SM\equiv 0$ (mod R слева), а кватернарная форма $N(\alpha S+rX)$ конгруэнциально представляет по модулям, взаимно простым с $\Omega\Delta r$, все числа вообще, по модулю Ω — все взаимно простые с ним квадратичные вычеты его, и по модулю Δ — все взаимно простые с ним числа.

§ 9

Для дальнейшего заметим, что, в виду условия $(\Omega, \Delta)=1$, форма $\Phi(x, y, z)$ не может иметь характеров по делителям Ω. Иначе эти характеры, в виду теоремы St. Smith'а, были бы у всего рода, а для представления M родом достаточно, чтобы было $\left(\frac{M}{\delta}\right)=\left(\frac{\Phi}{\delta}\right)$ при $\delta\,|\,\Delta$ независимо от символов $\left(\frac{M}{\omega}\right)$ при $\omega\,|\,\Omega$. Из этого следует, что кватернарная форма $\varphi(\xi', x', y', z')=\Omega\xi'^2+\Phi(x', y', z')$ конгруэнциально представляет по модулю Ω все взаимно простые с ним числа. По модулю Δ она, как нетрудно видеть, представляет все взаимно простые с ним числа, а по модулям, взаимно простым с $\Omega\Delta$ (включая и 2^s), — все числа вообще.

Пусть m — любое неособенное число, взаимно простое с r. Выберем S так, чтобы $N(S)\equiv m \pmod r$, что, как мы видели, возможно. После этого выберем λ, μ, ν, ρ так, чтобы $D(r)=r^5$. Теперь, если k — любой модуль, взаимно простой с $\Omega\Delta r$, подберем $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ так, чтобы

$$\Omega\alpha'^2+\Phi(\beta', \gamma', \delta')\equiv m \pmod{8\Omega^2\Delta k},$$

и, обращаясь к равенствам (1, 8), решим сравнения

$$\zeta \equiv \Omega\alpha', \ x' \equiv \beta', \ y' \equiv \gamma', \ z' \equiv \delta' \pmod{8\Omega^2\Delta k},$$

что возможно, ибо детерминант системы (1, 8) есть r^5. Тогда будет

$$\frac{\zeta^2 + \Omega\Phi(x', y', z')}{\Omega} \equiv m \pmod{8\Omega\Delta k}.$$

Отсюда следует, что по заданному M отыщутся такие S, что $SM \equiv 0$ mod R слева) и кватернарные формы $N(\alpha S + rX)$ представляют особенные числа, делящиеся на Ω и такие, что $\frac{N(\alpha S + rX)}{\Omega}$ неособенно и имеет любой неособенный вычет по любому модулю. Мы убедились в этом для модуля $8\Omega\Delta k$, где k — взаимно просто с $\Omega\Delta r$; из того факта, что это верно для такого модуля, следует верность этого для модуля $2^s\Omega^t\Delta^l k$ — факт, относящийся к элементарным свойствам квадратичных форм и их характеров. Далее, выбирая S должным образом по модулю r, добьемся того, чтобы $N(S) \equiv \Omega m \pmod{r}$, и беря X так, чтобы $\alpha \equiv 1 \pmod{r}$, получим

$$\frac{N(\alpha S + rX)}{\Omega} \equiv m \pmod{r}.$$

Это сравнение разрешимо также по mod r^v, где v—любое целое число.

§ 10

Теперь мы разберем подробнее конструкцию числа $r_1^2 r_2^2 \ldots r_s^2$ из § 4. В § 5 мы доказали, что, задавшись любой константой $c_2 > 0$, можно считать, что r_i состоит только из простых множителей $\theta_{\alpha_i} > c_2$ и являющихся квадратичными вычетами Ω. Воспользуемся теперь теоремой, доказанной проф. В. А. Тартаковским в мемуаре «Die Gesamtheit der Zahlen, die durch eine positive quadratische Form $F(x_1, \ldots, x_s)$; $(s \geqslant 4)$ darstellbar sind» [6] и в приложении к собственно примитивным кватернарным формам гласящей, что такие формы представляют все числа взаимно простые с их удвоенным детерминантом (неособенные), конгруэнциально представляемые ими, и достаточно большие сравнительно с детерминантом формы. Кроме того, в случае примитивной конгруэнциальной представляемости эта теорема гарантирует такое примитивное представление достаточно больших чисел, при котором компонента $x_1 \neq 0$.

Зададим теперь c_2 таким, что числа $> c_2$, неособенные и конгруэнциально представляемые формой $\xi^2 + \Omega\Phi(x, y, z)$, представляются ею так, что $\xi \neq 0$. В силу того, что простые делители r_i, $\theta_{\alpha_i} > c_2$ и являются квадратичными вычетами Ω, имеем:

$$\theta_{\alpha_i} = \xi_{\alpha_i}^2 + \Omega\Phi(x_{\alpha_i}, y_{\alpha_i}, z_{\alpha_i}).$$

Это—простое число. Вводя эрмитион

$$R_{\alpha_i} = \xi_{\alpha_i} + x_{\alpha_i} i_1 + y_{\alpha_i} i_2 + z_{\alpha_i} i_3,$$

заметим, что любая его степень $R_{\alpha_i}^{s_1}$ примитивна. В самом деле, имеем

$$R_{\alpha_i}^2 = 2\xi_{\alpha_i} R_i - \theta_{\alpha_i} \equiv 2\xi_{\alpha_i} R_{\alpha_i} \pmod{\theta_{\alpha_i}}.$$

Если этот эрмитион непримитивен, то делится на θ_{α_i}. Но $\xi_{\alpha_i} \not\equiv 0 \pmod{\theta_{\alpha_i}}$, ибо $\xi_{\alpha_i} \neq 0$ и $|\xi_{\alpha_i}| < \sqrt{\theta_{\alpha_i}}$. Далее, $R_{\alpha_i}^3 \equiv 4\xi_{\alpha_i}^2 R_{\alpha_i} \pmod{\theta_{\alpha_i}}$ и т. д. Так продолжаем до степени s. Вводя такие эрмитионы для всех делителей $\theta_{\alpha_i} | r_i$, получим, что любой делитель числа $w = r_1^2 \ldots r_s^2$ можно представить как норму примитивного произведения эрмитионов с простыми нормами.

§ 11

Теперь введем понятие о полной системе пакетов конгруэнциальных кватернарных форм.

Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_n$ суть все делители $r_1^2 \ldots r_s^2$, включая 1. Соответственно каждому из них построим эрмитионы $R_1, \ldots, R_u$, примитивные и такие, что

$$N(R_i) = t_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, u).$$

Обозначим $r_1^2 \ldots r_s^2 = w$. Все целые примитивные эрмитионы M разбиваются на конечное число классов вычетов по модулю w — очевидно, не больше w^4. Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_v$ представители тех из них, норма которых не взаимно проста с w, так что $(N(M_i), w) = t_i \neq 1$. Возьмем любой из наших эрмитионов R_k и пусть $M_1, M_2, \ldots, M_l$ имеют норму, делящуюся на $t_k = N(R_k)$. Возьмем любой из них, скажем, M_1. Пусть $m_1^{(t_k)}, \ldots, m_{\varphi(t_k)}^{(t_k)}$ — система всех взаимно простых с t_k вычетов t_k. Подберем $S_1^{(t_k)}, \ldots, S_{\varphi(t_k)}^{(t_k)}$ так, чтобы $N(S_j) \equiv m_j^{(t_k)}$ по модулю t_k; затем по $S_i^{(t_k)}$ подберем λ, μ, ν, ρ из § 8 так, чтобы $D(t_k) = t_k^5$, и полагая $\lambda\xi + \mu x + \nu y + \rho z = \alpha$, составим кватернарную форму

$$\varphi_{M_i, t_k, m_j^{(t_k)}}(\xi, x, y, z) = N(\alpha S_j^{(t_k)} + t_k X) = \zeta^2 + \Omega\Phi(x', y', z'), \qquad (1, 11)$$

где ζ, x', y', z' взяты из (1, 8). Тогда, как мы видели, форма (1, 11) конгруэнциально представляет все неособенные числа, являющиеся квадратичными вычетами Ω, и $\equiv m_j^{(t_k)} \pmod{t_k}$; подстановкой $\zeta = \zeta'\Omega$, $x' = x''$, $y' = y''$, $z' = z''$ она преобразуется в форму

$$\Omega \left\{ \Omega\zeta'^2 + \Phi(x'', y'', z'') \right\} = \Omega \Psi(\zeta', x'', y'', z''),$$

причем форма Ψ конгруэнциально представляет вообще все неособенные числа, сравнимые с $\frac{m_j^{(t_k)}}{\Omega} \pmod{t_k}$. Полагая $T = \alpha S_j^{(t_k)} + rX$, имеем

$$TM_i \equiv 0 \; (\text{mod } R \text{ слева}).$$

Это приводит нас к следующему выводу:

Существует положительная константа $c_3^{(t_k)}$, зависящая только от детерминанта формы $\varphi_{M_i, t_k, m_j^{(t_k)}}$, т. е. от $\Omega^4\Delta^2 D(t_k)^2 = \Omega^4\Delta^2 t_k^{10}$, такая, что если число $q > c_3^{(t_k)}$, $q \equiv m_j^{(t_k)} \pmod{t_k}$ (и следовательно взаимно просто

с t_k) и q—квадратичный вычет Ω, то найдется эрмитион S нормы $N(S)=q$ и такой, что

$$S'M_i \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ R_k \text{ слева}) \text{ и } N(S')=\Omega q.$$

Если это число q—не квадратичный вычет Ω, но

$$q > c_3^{(t_k)}, \qquad q \equiv \frac{m_j^{(t_k)}}{\Omega} \ (\mathrm{mod}\ t_k),$$

то найдется эрмитион S' такой, что

$$S'M_i \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ R_k \text{ слева}) \text{ и } NS' = \Omega q.$$

Если при фиксированных R_k (т. е. t_k) и M_i заставим $m_j^{(t_k)}$ пробегать все $\varphi(t_k)$ вычетов и для каждого будем строить форму $\varphi_{M_i, t_k, m_j^{(t_k)}}$, то полученную совокупность назовем **пакетом** конгруэнциальных кватернарных форм M_i и R_k. Очевидно, существует $c_4=c_4(\Omega, \Delta, t_k)$ такое, что для всякого q, взаимно простого с $2\Omega\Delta t_k$ и $q > c_4$, найдется эрмитион S с нормой q либо Ωq и такой, что $SM_i \equiv 0$ (mod R_k слева). Заметим, что такой S с $N(S)=\Omega q$ существует всегда при $q > c_4$ и $(q, 2\Omega\Delta t_k)=1$, но он неудобен для обращения.

Наконец, представителей M_i по mod w, нормы которых делятся на $t_k \mid w$, опять конечное число (их меньше w^4). Если же построим описанные выше пакеты для каждого из M_i, то в виду того что из

$$K \equiv M_i \ (\mathrm{mod}\ w) \text{ и } SM_i \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ R_k \text{ слева})$$

следует $SK \equiv 0$ (mod R_k слева), мы заключим, что существует константа $c_5=c_5(\Omega, \Delta, t_k)$ такая, что если число q взаимно простое с $2\Omega\Delta t_k$ и $q > c_5$, то по любому примитивному эрмитиону M', норма которого делится на t_k, $N(M') \equiv 0$ (mod t_k) укажем эрмитион S нормы Ωq или даже q, если q—квадратичный вычет Ω, такой, что $SM' \equiv 0$ (mod R_k). Все кватернарные формы $\varphi_{M_i, t_k, m_j^{(t_k)}}(\xi, x, y, z)$ при разных $m_j^{(t_k)}$ и M_i, но одном t_k образуют **систему пакетов**, принадлежащую t_k. Наконец, если переберем все t_k, т. е. все делители числа $r_1^2 \ldots r_s^2 = w$ и для каждого из них построим систему пакетов, то сможем высказать следующий вывод:

Существует константа c_6 такая, что если $q > c_6$ и $(q, 2\Omega\Delta w)=1$, то по любому примитивному M', норма которого делится на некоторое $t_l \mid w$, укажем эрмитион S примитивный, нормы Ωq и такой, что $SM' \equiv 0$ (mod R_l слева), а если q, кроме того, квадратичный вычет Ω, то такой же эрмитион S' с условием $S'M' \equiv 0$ (mod R_l слева) найдется с нормой q.

§ 12

Приступим к доказательству теоремы, сформулированной в § 1. Сперва проведем доказательство для частного случая, когда целое рациональное число M делится на квадрат числа $q > c_6$, взаимно простого с $2\Omega\Delta w$ и являющегося квадратичным вычетом Ω. Число M должно

быть неособенным и конгруэнциально представляемым формой $\Phi(x, y, z)$, как условлено в § 1. Мы предположим, что M взаимно просто с w. Имеем $M = nq^2$, где n—целое число, очевидно, конгруэнциально представляемое формой $\Phi(x, y, z)$. В силу теоремы § 4, число nw^2 будет представляться формой $\Phi(x, y, z)$:

$$nw^2 = \Phi(x_1, y_1, z_1),$$

причем построенное в § 4 представление вообще непримитивно. Но, как легко убедиться, рассматривая рассуждение § 4 и учитывая то, что $|S_i| = 1$ и $(n, w) = (M, w) = 1$, представление $nw^2 = \Phi(x_1, y_1, z_1)$ может быть выбрано так, что О. Н. Д. (x_1, y_1, z_1) делит w. Пусть будет О. Н. Д. $(x_1, y_1, z_1) = \frac{w}{t_k}$; тогда $nt_k^2 = \Omega\,\Phi(x', y', z')$—примитивное представление числа nt_k^2. Следовательно $\Omega nt_k^2 = \Omega\,\Phi(x', y', z')$.

Составим эрмитион $L = x'i_1 + y'i_2 + z'i_3$. Тогда $N(L) = -L^2 = \Omega\,\Phi(x', y', z') = \Omega nt_k^2$; L — примитивный эрмитион.

Согласно § 11, так как $q > c_6$, $(q, 2\Omega\Delta w) = 1$ и q — квадратичный вычет Ω, найдем примитивный эрмитион S нормы q и такой, что $SL \equiv 0$ (mod R_k слева), где, как и в § 11, $N(R_k) = t_k$. Тогда имеем также

$$S L \bar{S} \equiv 0 \text{ (mod } R_k \text{ слева).} \qquad (1, 12)$$

Обозначим $L_1 = SL\bar{S}$; $N(L_1) = \Omega nt_k^2 q^2$. Тогда, в силу (1, 12), можем положить

$$L_1 = R_k U; \qquad (2, 12)$$

U—целый эрмитион.

Заметим теперь, что L_1—вырожденный эрмитион, Real part $L_1 = 0$, ибо $L_1 = SL\bar{S}$ и L—вырожденный. Поэтому

$$\bar{L}_1 = -L_1 = \bar{U}\bar{R}_k \text{ и } L_1 = -\bar{U}\,\bar{R}_k, \quad \text{т. е. } L_1 \equiv 0 \text{ (mod } \bar{R}_k \text{ справа).}$$

Присоединяя сюда (2, 12), найдем, что при любом целом эрмитионе A будет

$$AR_kU \equiv 0 \text{ (mod } \bar{R}_k \text{ справа).} \qquad (3, 12)$$

Заметим теперь, что из $L_1 = R_kU$ и $N(L_1) \equiv 0$ (mod t_k^2) следует

$$N(U) = U\bar{U} \equiv 0 \text{ (mod } t_k),$$

откуда для любого целого B получим

$$B\bar{U}U \equiv 0 \text{ (mod } \bar{R}_k \text{ справа).} \qquad (4, 12)$$

Складывая (3, 12) и (4, 12), получим, что для любых целых A и B

$$(AR_k + B\bar{U})\,U \equiv 0 \text{ (mod } \bar{R}_k \text{ справа).}$$

Можно утверждать, что A и B возможно выбрать такими, что $N(AR_k + B\bar{U})$ — взаимно проста с t_k. Для этой цели заметим, что если утверждение это неверно, то, при всех A и B, $N(AR_k + B\bar{U})$ делится на определенное простое число $p_1 \mid t_k$. Будь это не так, тогда, если каноническое разложение t_k есть $t_k = p_1^{\gamma_1} \ldots p_\alpha^{\gamma_\alpha}$, мы нашли бы для каждого $p_i \mid t_k$

такую пару A_i, B_i, что $N\ (AR_k + B\bar{U}) \not\equiv 0 \pmod{p_i}$, и, положив $A \equiv \equiv A_i \pmod{p_i}$, $B \equiv B_i \pmod{p_i}$, нашли бы, что утверждение наше верно.

Итак, пусть для всех A и B

$$N\ (AR_k + B\bar{U}) \equiv 0 \pmod{p_1}.$$

В виду $p_1 \mid t_k$ имеем для всех A и $B N\ (AR_k + B\bar{U}) \equiv 2$ Real part $(B\bar{U}\bar{R}_k\bar{A}) \pmod{p_1}$, откуда, как и в § 7, выводим, что $\bar{U}R_k = p_1 V$, где V—целый эрмитион. Беря сопряженные, найдем $R_k U = p_1 \bar{V}$. Но по (2, 12), $R_k U = L_1$. Так что выходит, что $L_1 = p_1 V$ непримитивен. Так как $L_1 = = SL\bar{S}$, то и $SL\bar{S}$, а следовательно, и $\bar{S}\ (SL\bar{S})\ S = Lq^4 \equiv 0 \pmod{p_1}$. Так как $p_1 \mid w$, а $(q, w) = 1$, то очевидно $L \equiv 0 \pmod{p_1}$, что невозможно, ибо L примитивен. Этим наше утверждение доказано.

Тогда пусть $X = AR_k + B\bar{U}$ такое, что $(N\ (X),\ t_k) = 1$. Имеем $XU \equiv 0$ (mod $\bar{R}_k$ справа); получим

$$\bar{X}XU = N\ (X)\ U \equiv 0 \ (\text{mod}\ R_k\ \text{справа}). \tag{5, 12}$$

Присоединяя сюда тривиальное сравнение

$$t_k \cdot U \equiv 0 \ (\text{mod}\ \bar{R}_k\ \text{справа}), \tag{6, 12}$$

подберем числа a и b так, чтобы $aN\ (X) + bt_k = 1$, что, конечно, возможно. Помножим (5, 12) на a и (6, 12) на b и сложим. Получим $U \equiv 0$ (mod $\bar{R}_k$ справа) или $U = T\bar{R}_k$; T —целое. Подставляя это в (2, 12), найдем: $L_1 = R_k T \bar{R}_k$.

Отсюда Real part $T = 0$, ибо $T = \frac{1}{t_k} R_k^{-1} L_1 R_k$ и Real part $L_1 = 0$. Далее,

$$N\ (T) = -T^2 = \frac{N\ (L_1)}{t_k^2} = \Omega n q^2.$$

Положим $T = x''\mathrm{i}_1 + y''\mathrm{i}_2 + z''\mathrm{i}_3$, где x'', y'', z'' — целые числа. Имеем

$$-T^2 = \Omega\Phi\ (x'', y'', z'') = \Omega n q^2,$$

откуда

$$\Phi\ (x'', y'', z'') = nq^2 = M.$$

Ч. Т. Д.

§ 13

В § 12 мы предположили, что число $M = nq^2$ конгруэнциально представляемо формой $\Phi\ (x, y, z)$ и взаимно просто с $2\Omega\Delta w$, а $q > c_6$ и является квадратичным вычетом Ω. В этих предположениях мы доказали представляемость числа M формой $\Phi\ (x, y, z)$. Здесь мы освободимся от ограничения «M взаимно просто с w»; предположим, что q при прежних предположениях все еще взаимно просто с w, но n пусть делится на w_1, состоящее только из некоторых простых множителей w. Повторяя рассуждение § 12, дойдем до места: $nw^2 = \Phi\ (x_1, y_1, z_1)$. Здесь О. Н. Д. (x_1, y_1, z_1) может уже не делить w, но обязан состоять только

из простых делителей w. Обозначим его w_2. Тогда, полагая $x_1 = x'w_2$, $y_1 = y'w_2$, $z_2 = z'w_2$, получим примитивное представление:

$$n \cdot \frac{w^2}{w_2^2} = \Phi(x', y', z').$$

Пусть $\frac{w}{w_2} = \frac{t_k}{w_3}$, где дробь $\frac{t_k}{w_3}$ несократима, тогда $n \equiv 0 \pmod{w_3^2}$. Положим $n = n'w_3^2$; представление $n't_k^2 = \Phi(x', y', z')$ примитивно. Поэтому рассуждая, как в § 12, найдем

$$n'q^2 = \Phi(x'', y'', z''); \qquad \Omega n'q^2 = \Omega\Phi(x'', y'', z'').$$

Полагая $L'' = x''\mathfrak{i}_1 + y''\mathfrak{i}_2 + z''\mathfrak{i}_3$, найдем

$$\Omega n'q^2 = -L''^2.$$

Заметим теперь, что w_3 состоит из простых множителей w и только из них, поэтому отыщется такой K, что $N(K) = w_3$.

Возьмем теперь $KL''\overline{K} = x'''\mathfrak{i}_1 + y'''\mathfrak{i}_2 + z'''\mathfrak{i}_3$. Тогда

$$-(KL''\overline{K})^2 = \Omega n'w_3^2q^2 = \Omega\Phi(x''', y''', z''')$$

и

$$n'w_3^2q^2 = nq^2 = M = \Phi(x''', y''', z''').$$

Мы не будем останавливаться на том, можно ли это представление сделать примитивным; можно было бы даже просто написать $n'w_3^2 = \Phi(x''w_3, y''w_3, z''w_3)$, но это наверное не примитивное представление.

§ 14

Теперь освободимся от ограничения «q — квадратичный вычет Ω». Пусть $M = nq^2$ неособенное число, конгруэнциально представляемое $\Phi(x, y, z)$, $q > c_6$ и q не является квадратичным вычетом Ω, но все еще $(q, w) = 1$. Пусть, в обозначениях §§ 12 и 13,

$$n't_k^2 = \Phi(x'', y'', z''); \qquad \Omega n't_k^2 = \Omega\Phi(x'', y'', z'').$$

Составим $L'' = x''\mathfrak{i}_1 + y''\mathfrak{i}_2 + z''\mathfrak{i}_3$. Затем, согласно § 11, найдем эрмитион S нормы Ωq такой, что $SL''\overline{S} \equiv 0$ (mod R_k слева), и будем действовать в точности по § 12. Так как Ω взаимно просто с w, то все рассуждения § 12 имеют силу, и мы найдем:

$$L'' = SL''\overline{S} = R_k T \overline{R}_k, \qquad (1, 14)$$

$$N(T) = \frac{1}{t_k^2}(\Omega q)^2 \cdot \Omega n't_k^2 = \Omega^3 n'q^2.$$

Полагая

$$T = x_4\mathfrak{i}_1 + y_4\mathfrak{i}_2 + z_4\mathfrak{i}_3,$$

найдем

$$\Omega^2 n'q^2 = \Phi(x_4, y_4, z_4). \qquad (2, 14)$$

Докажем, что непременно

$$x_4 \equiv y_4 \equiv z_4 \pmod{\Omega}.$$

Мы имеем:

$$L''' = R_k T \bar{R}_k = SL''\bar{S}; \quad N(S) = \Omega q.$$

Обратимся теперь к равенствам (1, 6) в § 6. Пусть

$$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2gyz;$$
$$S = \xi + x i_1 + y i_2 + z i_3.$$

Так как $N(S) \equiv 0 \pmod{\Omega}$, то $\xi \equiv 0 \pmod{\Omega}$. Полагая

$$L'' = x'' i_1 + y'' i_2 + z'' i_3 = x_1 i_1 + y_1 i_2 + z_1 i_3,$$

покажем сперва, что все компоненты $SL\bar{S}$ делятся на Ω, т. е. $SL\bar{S} \equiv 0 \pmod{\Omega}$.

Это очевидно для реальной части, просто равной 0. Положим, что это справедливо и для компоненты при i_1. Полагая сперва

$$SL = \zeta + x_2 i_1 + y_2 i_2 + z_2 i_3,$$

найдем из (1, 6)

$$\zeta \equiv 0 \pmod{\Omega}; \qquad \eta = 0,$$

так что

$$x_2 \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial f(s, s', s'')}{\partial s}; \qquad y_2 \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial f(s, s', s'')}{\partial s'}; \qquad z_2 \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial f(s, s', s'')}{\partial s''}$$

по модулю Ω.

Тогда для компоненты при i_1 произведения $SL\bar{S}$, обозначаемой x_2', получим сравнение по модулю Ω:

$$x_2 \equiv -\frac{1}{2} \frac{\partial f(t, t', t'')}{\partial t},$$

где

$$t \equiv \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial f(s, s', s'')}{\partial s'}, & \frac{1}{2} \frac{\partial f(s, s' s'')}{\partial s''} \\ y & z \end{vmatrix},$$

$$t' \equiv \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial f(s, s', s'')}{\partial s''}, & \frac{1}{2} \frac{\partial f(s, s', s'')}{\partial s} \\ z & x \end{vmatrix},$$

$$t'' \equiv \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial f(s, s', s'')}{\partial s}, & \frac{1}{2} \frac{\partial f(s, s', s'')}{\partial s'} \\ x & y \end{vmatrix}$$

В виду этого находим:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f(t, t', t'')}{\partial t} \equiv \begin{vmatrix} a & d & e \\ \frac{1}{2} \frac{\partial f(s, s', s'')}{\partial s} & \frac{1}{2} \frac{\partial f(s, s', s'')}{\partial s'} & \frac{1}{2} \frac{\partial f(s, s', s'')}{\partial s''} \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= s \begin{vmatrix} a & d & e \\ a & d & e \\ x & y & z \end{vmatrix} + s' \begin{vmatrix} a & d & e \\ d & b & g \\ x & y & z \end{vmatrix} + s'' \begin{vmatrix} a & d & e \\ e & g & c \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Первый член равен нулю, остальные два суть

$$s' \cdot \frac{1}{2} \Omega \frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial z} \quad \text{и} \quad -s'' \cdot \frac{1}{2} \Omega \frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial y}$$

и следовательно, $x_2' \equiv 0 \pmod{\Omega}$.

Аналогично и $y_2' \equiv 0$ и $z_2' \equiv 0 \pmod{\Omega}$. Из (1, 14) находим

$$R_k T \bar{R}_k \equiv 0 \pmod{\Omega}$$

и следовательно,

$$\bar{R}_k (R_k T \bar{R}_k) R_k = T t_k^2 \equiv 0 \pmod{\Omega}.$$

В виду $(w, \Omega) = 1$, $t_k \mid w$, найдем

$$T = x_4 \mathfrak{i}_1 + y_4 \mathfrak{i}_2 + z_4 \mathfrak{i}_3 \equiv 0 \pmod{\Omega}$$

или

$$x_4 = x_5 \Omega, \qquad y_4 = y_5 \Omega, \qquad z_4 = z_5 \Omega.$$

Внеся это в (2, 14) и сокращая на Ω^2, найдем

$$n' q^2 = \Phi(x_5, y_5, z_5),$$

а отсюда, как и в § 13,

$$n' w_3^2 q^2 = n q^2 = M = \Phi(x_6, y_6, z_6).$$

Ч. Т. Д.

§ 15

У нас осталось еще затруднительное ограничение «q взаимно просто с w», от которого следует освободиться.

Пусть неособенное конгруэнциально представляемое формой $\Phi(x, y, z)$ число M не делится ни на один квадрат q^2, где $q > c_6$ и $(q, w) = 1$, но все же делится на квадрат q_1^2, где $q_1 > c_6$ и $(q_1, w) > 1$. В этом случае мы не можем гарантировать существования такого S, как в §§ 12, 13, 14, ибо q_1 не взаимно просто с удвоенными детерминантами форм соответствующих систем пакетов.

Поступим так: выберем еще одно число, играющее роль нашей константы рода w, — второе точно такое же число v, отличающееся свойствами, описанными в § 4, и условиями:

1) v — взаимно просто с w,

2) каждый простой множитель v, $p_i' > c_6$,

3) каждый простой множитель v есть квадратичный вычет Ω.

Для данного v можем построить, как и для w, совокупность систем пакетов и найти константу $c_7 > c_6$ такую, что если M конгруэнциально представляемо формой $\Phi(x, y, z)$ и $M \equiv 0 \pmod{q'^2}$, где $q' > c_7$ и $(q', v) = 1$, то M представляемо формой $\Phi(x, y, z)$.

Пусть теперь число M, удовлетворяющее только условиям неособенности и конгруэнциальной представляемости, делится на q''^2, где $q'' > c_7$. Разберем два случая:

1. $(q'', v) \neq 1$. Тогда q'' делится на один из простых делителей v,

скажем, p'. Но все эти делители $> c_6$ и взаимно просты с w, а значит

$$M \equiv 0 \pmod{p'^2}; \qquad p' > c_6; \qquad (p', w) = 1,$$

откуда, по предыдущему, M представляемо $\Phi(x, y, z)$.

2. $(q', v) = 1$. В виду $q' > c_7$ получим, что M представляемо формой $\Phi(x, y, z)$.

Итак, имеем окончательный результат:

Если число M неособенно, конгруэнциально представляемо формой $\Phi(x, y, z)$ и делится на какой-либо квадрат q^2, где $q > c_7$, то M представляемо формой $\Phi(x, y, z)$.

Полагая $c_7^2 = c_1(\Omega, \Delta)$, получим теорему, сформулированную в § 1.

К сожалению, вопрос о примитивности полученного представления слишком сложен и мы не будем на нем останавливаться.

Примечание. Пользуясь теоремами Hadamard'a—de la Vallée-Poussin'a о распределении простых чисел в прогрессиях, для весьма широкого множества форм с буквенными коэффициентами удается доказать, что каждая такая форма $f(x, y, z)$ вместе со своей союзной $\Phi(x, y, z)$ представляют все достаточно большие числа, удовлетворяющие родовым условиям $f(x, y, z)$, так что каждое такое число представляемо либо $f(x, y, z)$ либо $\Phi(x, y, z)$.

Ленинградский гос. университет.

Поступило 7. X. 1938.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Smith Stephen, On the ordres and genera of ternary quadratic forms, Proc. of London Phil. Soc., 1867.

[2] Bianchi L., Lezioni sulla teoria aritmetica delle forme quadratiche binarie e ternarie, Pisa 1911.

[3] Марков В. А., О положительных тройничных квадратичных формах, СПБ 1897.

[4] Bachman P., Arithmetik der quadratischen Formen (Zahlentheorie, Bd. IV), Berlin 1895.

[5] Hermite Ch., Oeuvres, t. I, Paris 1905.

[6] Tartakowsky W., Die Gesamtheit der Zahlen, die durch eine positive quadratische Form $F(x_2 \ldots, x_s)$, $(s \geqslant 4)$ darstellbar sind, Изв. АН СССР, 1929, стр. 111.

G. LINNIK. A GENERAL THEOREM ON REPRESENTATION OF NUMBERS BY SOME TERNARY QUADRATIC FORMS

SUMMARY

The present paper contains the proof of the following result:

Given a properly primitive positive ternary quadratic form $\Phi(x, y, z)$ belonging to invariants $[\Delta, \Omega]$ which are prime one to another, and a number M prime to $2\Omega\Delta$ and satisfying the generic conditions of $\Phi(x, y, z)$, there exists a constant $c_1(\Omega, \Delta) > 0$ such that, if M is divisible by a square $q^2 > c_1(\Omega, \Delta)$, M is representable by the form $\Phi(x, y, z)$.

The proof is based on certain theorems of Stephen Smith and V. A. Tartakowsky and uses certain quaternary hypercomplex numbers named «hermitions».